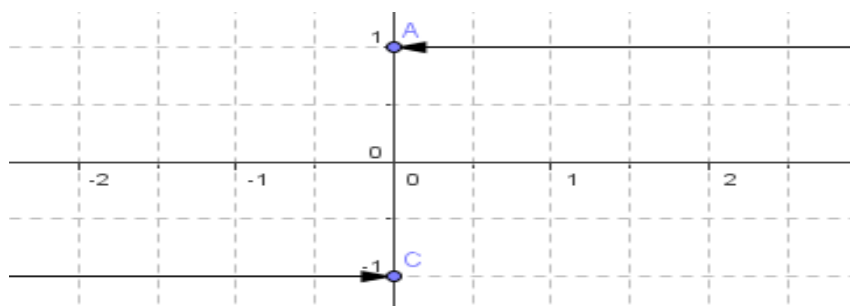


Elementaararvmatemaatika loengumaterjali konspekt

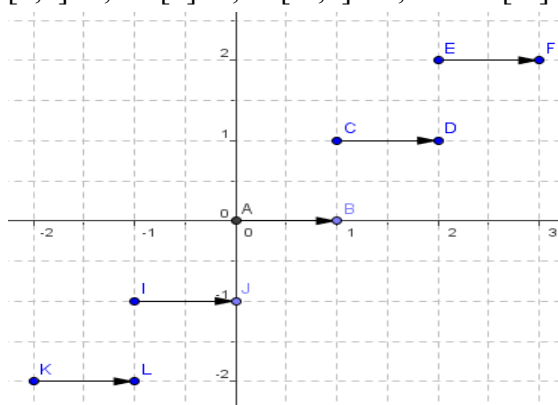
Kaur Alasoo

Definitsioonid:

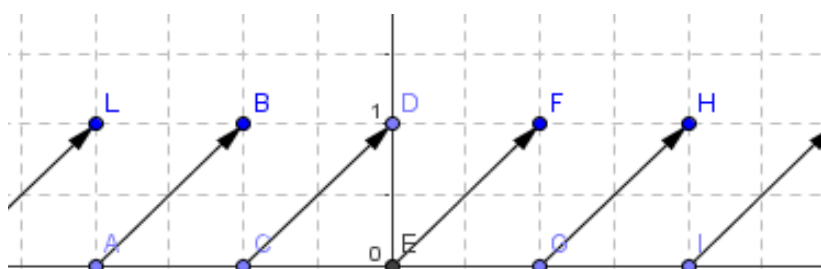
1. **Arvuhulga järjestatus** - Arvuhulka nimetatakse järjestatuks, kui iga tema kahe arvu a ja b korral kehtib üks kolmest võimalusest, kas $a > b$, $a = b$ või $a < b$
2. **Arvuhulga tihedus** - Arvuhulka nimetatakse tihedaks, kui tema iga kahe erineva arvu vahel leidub veel sama hulga arve.
3. **Arvuhulga vahetu järgnevus** - Arvuhulgas leiab aset vahetu järgnevus, kui igale arvule a järgneb selles hulgas arv $a+1$ selliselt, et nende arvude vahele ei jää ühtegi selle hulga teist arvu.
4. **Arvuhulga kinnisus tehte suhtes** - Arvuhulka nimetatakse kinniseks mingi tehte suhtes, kui selle hulga iga kahe arvu korral kuulub alati samasse hulka ka vaadeldava tehte tulemus
5. **Arvuhulga pidevus** - Kui arvuhulga igale arvule vastab üks kindel arvtegelise punkt ja vastupidi, igale arvtegelise punktile vastab üks kindel selle arvuhulga arv, siis öeldakse, et see arvuhulk on pidev.
6. **Vastandarv** - Naturaalarvu n vastandarvuks nimetatakse sellist arvu $-n$, mis rahuldab võrdsust $n + (-n) = 0$.
7. **Murdarvud** - Kui arv a jagub arvuga b , siis on jagatis täisarv, kui aga ei jagu, siis nimetame saadud arvu murdarvuks ja tähistame sümboliga a/b .
8. **Ratsionaalarvude hulk** - Ratsionaalarvuks nimetatakse arvu, mis avaldub jagatisena a/b , kus a ja b on täisarvud ja b ei ole 0 ($ax = b$; $a = 0$)
9. **Irratsionaalarv** - Arvu, mis esitub lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurru kujul nimetatakse irratsionaalarvuks.
10. **Reaalrõvude hulk** - Irratsionaalarvud koos ratsionaalarvudega moodustavad reaalarvude hulga.
11. **Kompleksarv** - Arve kujul $a+ib$, kus a ja b on reaalarvud ja i on imaginaarühik, nimetatakse kompleksarvudeks. Kõikide kompleksarvude hulka tähistatakse sümboliga \mathbb{C}
12. **Kompleksarvu moodul** - Kompleksarvule vastava punkti kaugust komplekstasandi nullpunktis nimetame kompleksarvu mooduliks. Arvutatakse valemist $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
13. **Kompleksarvu geomeetriline esitus** – kompleksarvu kujutamine teljestikus (komplekstasandil).
14. **Kompleksarvu trigonomeetriline kuju** - $a + bi = r(\cos \phi + i \sin \phi)$
15. **Funktsiooni mõiste** - Kui igale arvule x hulgast X on mingi eeskirja f järgi seatud vastavusse üks kindel arv y hulgast Y , siis öeldakse, et hulgas X on määratud funktsioon $y=f(x)$ ja seda kirjutatakse kujul $y=f(x)$, kus $x \in X$.
16. **Funktsiooni kasvamine vahemikus** - Kui mingis vahemikus argumendi väärtuste suurenedes ka funktsiooni väärtused suurenevad, siis see funktsioon on selles vahemikus kasvav.
17. **Lineaarfunktsioon, graafik** - Funktsiooni, mis avaldub kujul $y=ax+b$, nimetatakse lineaarfunktsiooniks.
18. **Pöördvõrdeline sõltuvus, graafik** - Sõltuvust, mis avaldub kujul $y=k/x$, nimetatakse pöördvõrdeliseks sõltuvuseks.
19. **Heaviside funktsioon, gaafik** – $y = 1$, kui $x > 0$ ja $y = -1$, kui $x < 0$; kohal 0 pole funktsioon määratud.



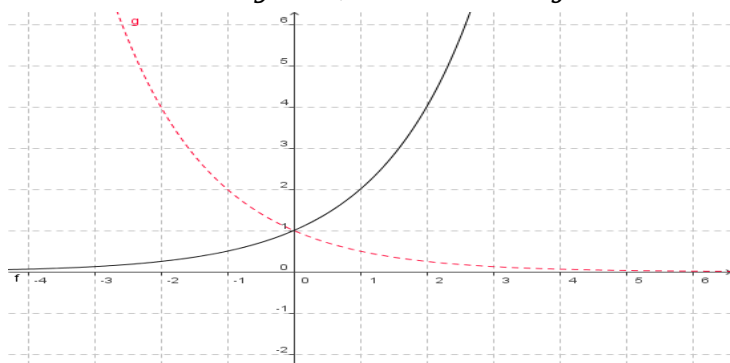
20. **Signumfunktsioon, graafik** - $y = 1$, kui $x > 0$ ja $y = -1$, kui $x < 0$ ja $y = 0$, kui $x = 0$
 21. **Täisosa funktsioon, graafik** - $y = [x]$, kus $[x]$ on suurim täisarv, mis ei ületa arvu x . Näiteks $[2,9]=2$; $[2]=2$; $[-2,5]=-3$; $[-2]=-2$



22. **Murdosa funktsioon, graafik** - Arvu murdosa funktsioon $y = \{x\} = x - [x]$ $[2,3]=2$ $\{2,3\}=0,3$
 $\{2\}=0$ $\{-3,75\}=0,25$

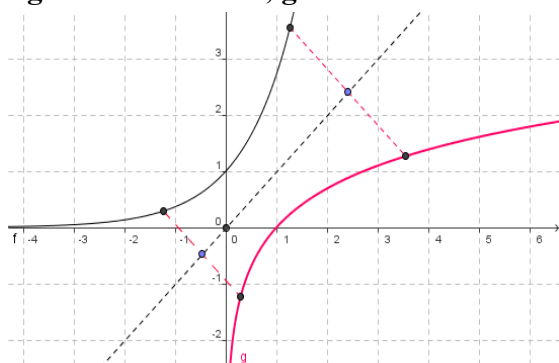


23. **Paarisfunktsioon** - Funktsiooni, mille graafik on sümmeetriline y-telje suhtes, nimetatakse paarisfunktsiooniks, nt $y = x^2$ Paarisfunktsiooni tunnuseks on võrdus $f(-x) = f(x)$.
 24. **EkspONENTfunktsioon, graafik** - EkspONENTfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni, mis on avalduv kujul $y = a^x$, kus $a \in R^+$ ja $a \neq 1$



25. **Arvu b logaritmi alusel a** - Arvu b logaritmi alusel a nimetatakse sellist arvu c, millega astendades alust a saame arvu b.

26. **Logaritmifunktsioon, graafik**



$y = e^x \Rightarrow y = \ln x$ (roosa)

27. **Paaritu funktsioon** - Funktsiooni, mille graafik on sümmeetriline punkti (0;0) suhtes, nimetatakse paarituks funktsiooniks, Paaritu funktsiooni tunnus $f(-x)=-f(x)$.
28. **Pöördfunktsioon** - Funktsioone, mille graafikud on sümmeetrilised sirge $y=x$ suhtes nimetatakse teineteise pöördfunktsioonideks. Pöördfunktsioon on funktsioon, mis seab antud funktsiooni $y=f(x)$ muutumispiirkonna igale väärtusele y vastavusse kõik need väärtused x funktsiooni määramispiirkonnast, mille korral $y=f(x)$. Kui iga arvu $y \in Y$ korral leidub ainult üks $x \in X$, mille korral $y=f(x)$, siis öeldakse, et funktsioonil $y=f(x)$ on pöördfunktsioon $y=g(x)$.
29. **Suvalise nurga koosinus** - Suvalise nurga koosinuseks nimetatakse selle nurga lõpphaara suvalise punkti abstsissi suhet selle punkti kaugusesse koordinaatide alguspunktist.
30. **Suvalise nurga tangens** - Suvalise nurga tangensiks nimetatakse selle nurga lõpphaara suvalise punkti ordinaadi ja abstsissi suhet.
31. arcsina – Siinuse pöördfunktsioon, leiab nurga, mille siinus on antud. $x=(-1)^n \arcsin x + k\pi$
32. arccosa - $x=\pm \arccos x + 2k\pi$
33. arctana - $x=\arctan x + k\pi$
34. **Perioodiline funktsioon** - Funktsiooni $y=f(x)$, mis rahuldab tingimust $f(x+p)=f(x)$, kus $p \neq 0$ iga x korral määramispiirkonnas X nimetatakse perioodiliseks funktsiooniks. Arvu p nimetatakse seejuures funktsiooni perioodiks.
35. Ühe ja sama mõiste kahe omaduse **tarvilikkuse ja piisavuse seos**, näide - Ühe omaduse eksisteerimine või puudumine toob kaasa teise omaduse eksisteerimise või puudumise.
 - Mõiste rööpkülik. Omadused: täisnurga olemasolu ja diagonaalide võrdsus.
 - Kolmnurk: nurkade võrdsus, külgede võrdsus.
36. Ühe ja sama mõiste kahe omaduse **sõltumatuse seos**, näide - Ühe omaduse olemasolu ei mõjuta teise omaduse olemasolu.
 - Mõiste rööpkülik. Omadused: kõikide külgede võrdsus, diagonaalide võrdsus.
 - Kolmnurk: nürinurga olemasolu, kahe nurga võrdsus.
37. Ühe ja sama mõiste kahe omaduse **vasturääkivuse seos**, näide - Ühe omaduse olemasolu välistab teise olemasolu.
 - Mõiste kolmnurk. Omadused: täisnurga olemasolu, nürinurga olemasolu
38. **Mõiste sisu** - nende objektide üldised ja olulised omadused.
39. **Mõiste maht** - objektid, nende klassid, mida mõiste peegeldab.
Näide:
Mõiste rööpkülik
 - maht: ruudud, ristkülikud, rombid, kõik võimalikud nimetatutest erinevad rööpkülikud
 - sisu: nelinurksus, vastaskülgede paralleelsus, vastasnurkade võrdsus, diagonaalide poolitumine, lähisnurkade summa sirgnurk jt
40. **Soo- ja liigimõiste**, näide – Liigimõiste maht on soomõiste pärisosahulgaks, liigimõiste on väiksem. Nt romb on liigimõiste, rööpkülik on soomõiste.
41. Klassikaline **defineerimine soomõiste ja liigierinevuse kaudu** - Tavaliselt kasutatakse defineerimisel järgmist võtet: uus tundmatu defineeritakse kui juba vana tuntu, mis täidab lisaks vanale teatud lisatingimusi.
 - Näide. *Korrapäraseks hulknurgaks nimetatakse hulknurka, mille kõik küljed ja nurgad on võrdsed.*
 - Selleks vanaks on üldjuhul defineeritava mõiste lähim soomõiste, täiendavad lisatingimused kannavad aga nimetust liigierinevus.
42. **Teoreem** - Kui mingi lause tõesust saab matemaatikas põhjendada varem teada olevate tõdede (teiste tõeste lausete) abil, siis öeldakse, et see lause on teoreem.
43. **Aksiom** – Lause, mida loetakse tõeseks põhjendamata.
44. **Teoreemi eeldus ja väide** - Eeldusest näeme, mis on teada, mis antud. Väites selgub aga mida tuleb näidata, tõestada.
45. **Pöördlause ja pöördteoreem** - Lauset, mis saadakse eelduse ja väite vahetamisel antud

lauses, nimetatakse selle lause pöördlauseks. Kui nii antud lause, kui ka pöördlause osutuvad tõesteks siis on meil tegemist teineteise pöördteoreemidega

Operatsioonid, omadused:

1. Funktsiooni graafiku **lüke vektoriga (0;a)**, graafik, valem - Iga argumendi väärtuse korral liidetakse funktsiooni väärtusele a. $y=k/x \Rightarrow y=k/x + a$.
2. Funktsiooni graafiku **lüke vektoriga (a;0)**, graafik, valem - Graafik nihkub paremale ($a>0$), vasakule ($a<0$). Uue funktsiooni väärtus iga argumendi x korral on sama, mis vana funktsiooni väärtus argumendi x-a korral. $y=4/x \Rightarrow y=4/x-2$
3. Funktsiooni graafiku lüke vektoriga (a;b), graafik, valem
Analoogia kahe eelmise põhjal.
4. **EkspONENTFUNKTSIOONI GRAAFIK, OMA DUSED**
 - Määramispiirkond – kõik reaalarvud
 - Muutumispiirkond – positiivsed reaalarvud
 - Graafik läbib punkti (0;1)
 - Teineteise pöördarvudele vastavate funktsioonide graafikud sümmeetrilised y-telje suhtes.
 - Kasvab kogu määramispiirkonnas, kui $a>1$. Kahaneb, kui $0<a<1$.
5. **LOGARITMFUNKTSIOONI GRAAFIK, OMA DUSED**
 - Määramispiirkond: positiivsed reaalarvud
 - Muutumispiirkond: kõik reaalarvud
 - Graafik läbib punkti (1;0)
 - Funktsioon kasvab, kui $a>1$ ja kahaneb kui $0<a<1$
6. Siinusfunktsiooni graafik, omadused
7. Tangensfunktsiooni graafik, omadused
8. Naturaalarvude hulga omadused
9. Täisarvude hulga omadused
10. Ratsionaalarvude hulga omadused
11. Reaalarvude hulga omadused
12. Arvuhulkade vahelised kuuluvusseosed
13. Linearfunktsiooni graafik, omadused
14. Pöördvõrdeline sõltuvuse graafik, omadused
15. Funktsiooni graafiku peegeldus y teljest, graafik, valem
16. Funktsiooni graafiku peegeldus x teljest, graafik, valem
17. Funktsiooni graafiku peegeldus punktist (0;0), graafik, valem
18. Funktsiooni graafiku peegeldus sirgest $y=x$, graafik valem
19. Soo- ja liigimõiste mahtude vaheline kuuluvusseos, näide
20. Soo- ja liigimõiste sisude vaheline kuuluvusseos, näide

21. DEFINITSIOONIDELE PÜSTITATUD NÕUDED:

- Definiitsioon peab olema adekvaatne, st vastav defineeritavale objektile.
 - Definiitsioon ei tohi sisaldada surnud ringi. Defineeriv pool ei tohi toetuda mõistele, mida defineeritakse.
 - Definiitsioon ei tohi sisaldada teineteisest tulenevaid omadusi.
22. Millal kasutatakse sõnaühendit “**siis ja ainult siis**”? Näide - Kui osutuvad tõesteks nii lause, kui ka pöördlause, st tegemist on pöördteoreemidega, siis sõnastatakse teoreem ja pöördteoreem üheskoos kasutades sõnaühendeid siis ja ainult siis või parajasti siis.
 - Täisarv jagub kümnega parajasti siis, kui ta lõpeb nulliga.
 23. Millal öeldakse, et on antud **mõiste tunnus**? Näide - Kui kehtivad nii teoreem kui ka pöördteoreem, siis öeldakse, et on antud mõiste tunnus. Nt kümnega jaguvuse tunnus.
 24. **Vastuväitelse tõestusviisi kirjeldus** - Selle aluseks on üks loogikaseadus:
 - Iga väite korral on tõene kas väide ise või selle eituse, kolmandat võimalust ei ole.
 - Selle tõestusviisi korral eeldatakse, et teoreemi väide ei ole tõene, vaid et tõene on

hoopis selle väite eitus.

- Sellest oletusest tulenev arutelu viib aga vasturääkivusele teoreemi eeldusega või mõne muu teadaoleva faktiga. Sellest järeldubki, et väite eitus ei saa tõene olla ja järelikult peab tõene olema väide ise.

25. Matemaatilise induktsiooni meetodil põhineva tõestuse etapid

- Veendutakse hüpoteesi kehtivuses $n=1$ korral;
- Oletatakse, et väide on tõene mingi suvalise naturaalarvu k korral. Seejärel näidatakse, et sellisest oletusest järeldub väite tõesus k -le vahetult järgneva naturaalarvu $k+1$ korral. Sellest, et selline üleminek on võimalik järeldubki siis, et väide on tõene suvalise naturaalarvu korral.

Tõestused, valmite tuletused:

- **Valem kahe kompleksarvu korrutamiseks trigonomeetrilisel kujul**

$$a = R(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$b = r(\cos \beta + i \sin \beta)$$

$$ab = Rr(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) =$$

$$= \dots \dots \dots =$$

$$= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)$$

$$ab = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

- **Valem kahe kompleksarvu jagamiseks trigonomeetrilisel kujul**

$$a = R(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$b = r(\cos \beta + i \sin \beta)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{R}{r}(\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta))$$

$$a^n = r^n(\cos n\phi + i \sin n\phi)$$

Korrutise logaritmitamise valem

- $\log_a x = m$ st $a^m = x$
- $\log_a y = n$ st $a^n = y$
- ? $\log xy$
- $xy = a^m a^n$
- $xy = a^{m+n}$
- Logaritmi definitsiooni põhjal saame siit, et
- $\log_a xy = m + n$.
- Kasutades ülaltoodud tähiseid saamegi siit, et:
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

Jagatise logaritmitamise valem

- Analoogia põhjal eelmisest.

Ise vaadata:

- Täisarvu kümne jaguvuse tunnus (teoreem ja pöördteoreem)
- Teoreem sirge paralleelsusest tasapinnaga
- Nelinurga külgede keskpunktide järjestikuse ühendamisel saadud nelinurk on rööpkülik
- Kolmnurga ümberringjoone suvalise punkti ristprojektsioonid kolmnurga külgedel või küljepikendustel asuvad ühel sirgel (teoreem)
- Newtoni binoomvalem