

Algebra I esimene kontrolltöö

Kaur Alasoo

2008-10-17

1 Algebralised struktuurid

Definitsioon 2.1.2 Mittetühja hulka G , millel on defineeritud üks kahekohaline algebraline tehe, nimetatakse **rühmoidiks**. Rühmoidi nimetatakse **kommutatiivseks**, kui

$$xy = yx$$

mistahes $x, y \in G$ korral.

Definitsioon 2.1.24 Olgu G rühmoid korrutamise suhtes. Elementi e rühmoidis G nimetatakse rühmoidi G **ühikelemendiks**, kui

$$ex = xe = x$$

iga elemendi $x \in G$ korral. Rühmoidis võib olla ainult üks ühikelement. Kui rühmoidi tehteks on liitmine, siis tähistatakse ühikelementi tähisega 0 ja nimetatakse **nullelemendiks**.

Definitsioon 2.1.26 Rühmoidi, mille tehe on assotsiatiivne ($(ab)c = a(bc)$), nimetatakse **poolrühmaks**.

Definitsioon 2.1.32 Poolrühma, milles leidub ühikelement, nimetatakse **monoidiks**.

Definitsioon 2.1.37 Olgu G monoid korrutamise suhtes ning 1 tema ühikelement. Elemendi $g \in G$ **pöördelemendiks** nimetatakse niisugust elementi $h \in G$, mille korral $gh = hg = 1$. Elementi, millel leidub pöördelement, nimetatakse **pööratavaks** elemendiks. Kui monoidi tehteks on liitmine, siis nimetatakse pöördelementi **vastandelemendiks**. **Rühmaks** nimetatakse monoidi, mille **igal** elemendil on olemas pöördelement.

Definitsioon 2.1.47 Rühma nimetatakse **kommutatiivseks rühmaks** ehk **Abeli rühmaks**, kui tema tehe on kommutatiivne.

Lause 2.1.48 Hulk A on Abeli rühm, kui temal on defineeritud kahekohaline algebraline tehe, mida me nimetame liitmiseks, ning mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. liitmise assotsiatiivsus,
2. nullelemendi olemasolu,
3. vastandelemendi olemasolu,
4. liitmise kommutatiivsus.

Definitsioon 2.2.1 Hulka R nimetatakse **ringiks**, kui temas on defineeritud kaks kahekohalist algebralist tehet, liitmine ja korrutamine, nii et

1. hulk R on liitmise suhtes Abeli rühm,
2. liitmine ja korrutamine hulgal R on seotud **distributiivsuse seadustega**, see tähendab, et

$$(a + b)c = ac + bc$$

ja

$$a(b + c) = ab + ac$$

mistahes $a, b, c \in R$ korral.

Definitsioon 2.2.11 Ringi, mille nullist erinevad elemendid moodustavad korrutamise suhtes rühma, nimetatakse korpuseks. Korpust, mille korrutamine on kommutatiivne, nimetatakse **kommutatiivseks korpuseks**. Kui korpus ei ole kommutatiivne, nimetatakse teda **kaldkorpus**. Korpusel kehtivad järgmised omadused: liitmise kommutatiivsus, liitmise assotsiatiivsus, null-elementi olemasolu, vastandelemendi olemasolu, korrutamise assotsiatiivsus, liitmise ja korrutamise distributiivsus, ühikelemendi olemasolu ja pöördelemendi olemasolu.

2 Matrikis astak

Teoreem 4.6.2 (Teoreem matriksi astakust.) Matriksi astak võrdub matriksi nullist erinevate miinorite kõrgeima järguga.

Järeldus 4.6.3 Matriksi astak võrdub matriksi lineaarselt sõltumatute veeruvektorite maksimaalarvuga.

Järeldus 4.6.4 Ruutmatriksi determinant võrdub nulliga siis ja ainult siis, kui matriksi reavektorid on lineaarselt sõltuvad.

3 Pöördmatriks

Definitsioon 4.7.1 Matriksi $A \in Mat_n(K)$ pöördmatriksiks nimetatakse sellist matriksit $B \in Mat_n(K)$, mille korral

$$AB = BA = E$$

Teoreem 4.7.9 Matriksil $A \in Mat_n(K)$ on pöördmatriks olemas siis ja ainult siis, kui matriks on regulaarne (determinant ei ole võrdne nulliga).

Teoreem 4.7.10 Kui $A = (a_{ij}) \in Mat_n(K)$ on regulaarne, siis

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

kus A_{ij} on elemendi a_{ij} algebraalne täiend.

Pöördmatriksi leidmine elementaarteisenduste abil: <http://www.purplemath.com/modules/mtrxinvr.htm>

4 Lineaarvõrrandite süsteemid

Vaata ise.