Maatriks

5. detsember 2007. a.
14:29

Definitsioon 1.1. Maatriksiks nimetatakse ümarsulgudesse paigutatud reaalarvude tabelit, milles on eristatavad read ja veerud.

Definitsioon 1.2. Maatriksit, milles on m rida ja n veergu, nimetatakse täpsemalt (m, n)-maatriksiks. Arvupaari (m, n) nimetatakse selle maatriksi mõõtmeteks.

Definitsioon 1.3. Reaalarve, milledest maatriks koosneb, nimetatakse maatriksi elementideks.

Maatrikseid tähistatakse tavaliselt suurte ladina tähtedega: A, B, ..., X, Y, Z.
Maatriksite elemente tähistatakse vastavate väikeste ladina tähtedega, mis võivad olla varustatud ka indeksitega: a, b, c_1, x_{mn}.

Definitsioon 1.4. Kõigi (kõikvõimalike mõõtmetega) maatriksite hulka tähistame edaspidi Mat abil ning kõigi (m, n)-maatriksite hulka tähistame edaspidi $\mathrm{Mat}(m, n)$ abil.

Definitsioon 1.5. Maatriksit, mille ridade arv on võrdne veergude arvuga, s.t. $m = n$, nimetatakse ruutmaatriksiks. Maatriksit, mille ridade arv erineb veergude arvust, s.t. $m \neq n$, nimetatakse ristkülikmaatriksiks. Ruutmaatriksit mõõtmetega (n, n) nimetatakse ka n-järku maatriksiks.

Definitsioon 1.6. Ruutmaatriksit

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

nimetatakse ühikmaatriksiks.

Definitsioon 1.7. Me nimetame (m, n)-maatriksit nullmaatriksiks, kui selle maatriksi kõik elemendid on nullid. Nullmaatriksi tähiseks on Θ.

Definitsioon 1.8. Me nimetame maatriksit A võrdseks maatriksiga B, kui neil maatriksitel on samad mõõtmed ning ühesugustel kohtadel on võrdsed elemendid. Maatriksite A ja B võrdsust tähistame $A = B$.

Definitsioon 1.9. Maatriksi A vastandmaatriksiks nimetatakse maatriksit, mille elementideks on maatriksi A elementide vastandarvud. Maatriksi A vastandmaatriksi tähiseks on $-A$.

Definitsioon 1.10. Maatriksi A transponeeritud maatriksiks nimetatakse maatriksit, mis saadakse maatriksi A ridade ja veergude äravahetamisel. Maatriksi A transponeeritud maatriksi tähiseks on A^T.

Definitsioon 1.11. Maatriksit A nimetatakse sümmeetriliseks, kui $A^T = A$ ning kaldsümmeetriliseks, kui $A^T = -A$.

Definitsioon 1.12. Mistahes kahe (m, n)-maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ja } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

korral nimetatakse nende summaks (m, n)-maatriksit, mida tähistatakse $A + B$ abil ja defineeritakse valemiga

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Maatrikiste liitmise omadused:

Omadus 1.1. Maatriksite liitmine on assotsiatiivne, s.t. mistahes $X, Y, Z \in \mathrm{Mat}(m, n)$ korral kehtib $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$.

Omadus 1.2. Iga $X \in \mathrm{Mat}(m, n)$ ning nullmaatriksi $\Theta \in \mathrm{Mat}(m, n)$ korral kehtivad $X + \Theta = X, \Theta + X = X$.

Omadus 1.3. Iga $X \in \mathrm{Mat}(m, n)$ ning tema vastandmaatriksi $-X \in \mathrm{Mat}(m, n)$ korral kehtivad $X + (-X) = \Theta, (-X) + X = \Theta$.

Omadus 1.4. Maatriksite liitmine on kommutatiivne, s.t. mistahes $X, Y \in \mathrm{Mat}(m, n)$ korral kehtib $X + Y = Y + X$. Tõestada!

Definitsioon 1.13. Maatriksite $X, Y \in \mathrm{Mat}(m, n)$ vaheks nimetatakse (m, n)-maatriksit $X - Y := X + (-Y)$.

Definitsioon 1.14. Reaalarvu λ ja mistahes mõõtmetega maatriksi A korrutiseks nimetatakse maatriksit, mille elemendid saadakse maatriksi A vastavate elementide läbikorrutamisel arvuga λ. Arvu λ ja maatriksi A korrutise tähiseks on λA.

Maatriksi reaalarvuga korrutamise omadused:

Omadus 1.5. $1X = X$.

Omadus 1.6. $(-1)X = -X$.

Omadus 1.7. $0X = \theta$.

Omadus 1.8. $\lambda\theta = \theta$.

Omadus 1.9. $(\lambda\mu)X = \lambda(\mu X)$. Tõestada!

Omadus 1.10. $\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y$.

Omadus 1.11. $(\lambda + \mu)X = \lambda X + \mu X$.

Omadus 1.12. $\lambda(X - Y) = \lambda X - \lambda Y$.

Omadus 1.13. $(\lambda - \mu)X = \lambda X - \mu X$.

Definitsioon 1.15. Maatriksite

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} \text{ ja } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qr} \end{pmatrix}$$

korrutiseks nimetatakse (p, r)-maatriksit

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pr} \end{pmatrix},$$

kus

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{iq} b_{qj}$$

iga $i \in \mathbb{N}_p$ ja iga $j \in \mathbb{N}_r$ korral.

Maatrikiste korrutamise omadused:

Omadus 1.14. Maatriksite korrutamine on assotsiatiivne, s.t. mistahes kolme maatriksi $X \in \mathrm{Mat}(p,q)$, $Y \in \mathrm{Mat}(q,r)$ ja $Z \in \mathrm{Mat}(r,s)$ korral

$$(XY)Z = X(YZ).$$

Tõestada!

Omadus 1.15. Mistahes maatriksi $X \in \mathrm{Mat}(m,n)$ ning vastavate ühikmaatriksite $E_m \in \mathrm{Mat}(m,m)$ ja $E_n \in \mathrm{Mat}(n,n)$ korral

$$XE_n = X, \quad E_mX = X.$$

Omadus 1.16. Mistahes kolme maatriksi $X, Y \in \mathrm{Mat}(p,q)$ ja $Z \in \mathrm{Mat}(q,r)$ korral

$$(X \pm Y)Z = XZ \pm YZ.$$

Omadus 1.17. Mistahes kolme maatriksi $X \in \mathrm{Mat}(p,q)$ ja $Y, Z \in \mathrm{Mat}(q,r)$ korral

$$X(Y \pm Z) = XY \pm XZ.$$

Maatrikiste transponeerimise omadused:

Omadus 1.18. Mistahes maatriksite $X, Y \in \mathrm{Mat}(m,n)$ korral

$$(X \pm Y)^T = X^T \pm Y^T.$$

Omadus 1.19. Mistahes $a \in \mathbb{R}$ ja mistahes $X \in \mathrm{Mat}$ korral

$$(aX)^T = aX^T.$$

Omadus 1.20. Mistahes $X \in \mathrm{Mat}(p,q)$ ja $Y \in \mathrm{Mat}(q,r)$ korral

$$(XY)^T = Y^TX^T.$$

Permutatsioonid

5. detsember 2007. a.
14:56

Definitsioon 2.1. Hulga $H = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (näiteks $H = \mathbb{N}_n$) elementide ümberjärjestust, milles hulga H iga element esineb täpselt üks kord, nimetatakse hulga H permutatsiooniks.

Hulga $H = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kõigi permutatsioonide hulga tähiseks on $P(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$. Hulga $\mathbb{N}_n$ kõigi permutatsioonide hulga tähiseks on P_n või $P(1, 2, \dots, n)$.

Definitsioon 2.2 Permutatsiooni $123 \dots n$ nimetatakse hulga $\mathbb{N}_n$ loomulikuks permutatsiooniks.

Definitsioon 2.3 Öeldakse, et elemendipaar (α_i, α_j) moodustab inversiooni permutatsioonis

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \dots,\ \alpha_i, \dots,\ \alpha_j, \dots,\ \alpha_n,$$

kui selles paaris esimene arv α_i on suurem teisest arvust α_j, s.t. $\alpha_i > \alpha_j$.
Inversioonide arvu tähiseks permutatsioonis $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n$ on $I(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n)$.

Definitsioon 2.4. Permutatsiooni nimetatakse paarispermutatsiooniks (paarituks permutatsiooniks), kui inversioonide arv antud permutatsioonis on paarisarv (paaritu arv).

Permutatsioonide omadused:

Teoreem 2.1. Hulga $\mathbb{N}_n$ elementidest saab moodustada $n!$ permutatsiooni.

Teoreem 2.2. Kui permutatsioonis omavahel ära vahetada kaks elementi, siis permutatsioon muudab paarsust. Tõestada!

Teoreem 2.3. Kui $n \geq 2$, siis permutatsioonide hulgas P_n on paaris ja paarituid permutatsioone sama palju, s.t. kumbagi on $\frac{1}{2}n!$

Determinant

5. detsember 2007. a.
15:06

Definitsioon 3.1. Me nimetame n-järku ruutmaatriksi

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

(n-järku) determinandiks reaalarvu, mida tähistame

$$| X | := \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

abil ja anname valemiga

$$| X | := \sum_{P(1,2,\dots,n)} (-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n)} x_{1\alpha_1} x_{2\alpha_2} \dots x_{n\alpha_n}.$$

Omadus 3.1. Maatriksi ja transponeeritud maatriksi determinandid on võrdsed, s.t. $X \in \text{Mat}(n,n) \Longrightarrow | X | = | X^T |$.

Omadus 3.2. Maatriksi kahe rea (veeru) äravahetamisel muudab maatriksi determinant märgi.

Järeldus 3.1. Kui maatriksis kaks rida (veergu) on võrdsed, siis maatriksi determinant on null.

Omadus 3.3. Kui maatriksis mingit rida (veergu) korrutada mistahes arvuga, siis maatriksi determinant korrutub sama arvuga.

Omadus 3.4. Kui maatriksi mingile reale (veerule) liita mistahes arvuga korrutatud mistahes teine rida (veerg), siis uue maatriksi determinant on võrdne esialgse maatriksi determinandiga. Tõestada!

Omadus 3.5. Kolmnurksete maatriksite X_1, X_2, X_3 ja X_4 korral

$$| X_1 | = | X_2 | = x_{11} x_{22} \dots x_{nn}, \quad | X_3 | = | X_4 | = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} x_{1n} x_{2,n-1} \dots x_{n1}.$$

Teoreem 5.1. Sama järku ruutmaatriksite korrutise determinant võrdub nende maatriksite determinantide korrutisega, s. t.

$$X, Y \in Mat(n,n) \quad \Longrightarrow \quad |XY| = |X||Y| \, .$$

Tõestada!

Järeldus 5.1. Kehtivad valemid

$$|XY^T| = |X||Y|, \qquad |X^T Y| = |X||Y| \, .$$

Laplace'i teoreem

5. detsember 2007. a.
15:31

Olgu meil maatriks

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix}$$

ja arv selline arv $m \in \mathbb{N}$, et $m \leq n$ ja $m \leq k$ (ruutmaatriksi korral, s.t. kui $k = n$, $m \in \mathbb{N}_n$). Fikseerime maatriksis X read $i_1, i_2, \dots, i_m$ ja veerud $j_1, j_2, \dots, j_m$.

Definitsioon 4.1. Determinanti

$$M_m := \begin{vmatrix} x_{i_1 j_1} & x_{i_1 j_2} & \dots & x_{i_1 j_m} \\ x_{i_2 j_1} & x_{i_2 j_2} & \dots & x_{i_2 j_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i_m j_1} & x_{i_m j_2} & \dots & x_{i_m j_m} \end{vmatrix}$$

nimetatakse maatriksi X m-järku miinoriks.

Olgu meil tegemist ruutmaatriksiga (s.t. $k = n$) ja olgu $m < n$. Tähistame eelnevalt fikseerimata jäänud ridade ja veergude indeksid kasvavas järjekorras vastavalt

$$i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n; \qquad j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n.$$

Definitsioon 4.2. Miinorit

$$M_{n-m} := \begin{vmatrix} x_{i_{m+1} j_{m+1}} & x_{i_{m+1} j_{m+2}} & \dots & x_{i_{m+1} j_n} \\ x_{i_{m+2} j_{m+1}} & x_{i_{m+2} j_{m+2}} & \dots & x_{i_{m+2} j_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i_n j_{m+1}} & x_{i_n j_{m+2}} & \dots & x_{i_n j_n} \end{vmatrix}$$

nimetatakse miinori M_m täiendusmiinoriks.

Definitsioon 4.3. Märgiga varustatud täiendusmiinorit

$$A_{n-m} := (-1)^k M_{n-m}, \text{ kus}$$

$$k := i_{m+1} + i_{m+2} + \dots + i_n + j_{m+1} + j_{m+2} + \dots j_n,$$

nimetatakse miinori M_m algebraliseks täiendiks.

Teoreem 4.2. (Laplace'i teoreem). Olgu X n-järku ruutmaatriks, $m \in \mathbb{N}_n$ ja $i_1, i_2, \ldots, i_m \in \mathbb{N}_n$ sellised, et $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$. Siis maatriksi X determinant $| X |$ võrdub kõigi selliste korrutiste, mille üheks teguriks on fikseeritud ridadele $i_1, i_2, \ldots, i_m$ toetuv m-järku miinor ja teiseks teguriks tema algebraline täiend, summaga, s.t.

$$| X | = \sum M_m A_{n-m},$$

kus summa tuleb võtta üle kõigi miinorite M_m, mis toetuvad ridadele $i_1, i_2, \ldots, i_m$.

Analoogiline tulemus kehtib ka veergude $i_1, i_2, \ldots, i_m$ jaoks.

Definitsioon 4.4. Valemit

$$|X| = x_{k1}X_{k1} + x_{k2}X_{k2} + \cdots + x_{kn}X_{kn}$$

nimetatakse determinandi $|X|$ arendiseks k-nda rea järgi. Selle valemi kasutamist determinandi arvutamisel nimetatakse determinandi $|X|$ arendamiseks k-nda rea järgi.

Definitsioon 4.5. Valemit

$$|X| = x_{1k}X_{1k} + x_{2k}X_{2k} + \cdots + x_{nk}X_{nk}$$

nimetatakse determinandi $|X|$ arendiseks k-nda veeru järgi. Selle valemi kasutamist determinandi arvutamisel nimetatakse determinandi $|X|$ arendamiseks k-nda veeru järgi.

Pöördmaatriks

Definitsioon 6.1. Me nimetame n-järku maatriksi A pöördmaatriksiks sellist n-järku maatriksit X, mis rahuldab kahte maatriksvõrrandit:

$$AX = E, \qquad XA = E.$$

Definitsioon 6.2. Me nimetame n-järku maatriksit Y regulaarseks (singulaarseks), kui

$$|Y| \neq 0, \qquad (|Y| = 0).$$

Pöördmaatriksi omadused:

Omadus 6.1. Kui n-järku maatriksil A leidub pöördmaatriks, siis nii maatriks A kui ka tema pöördmaatriks on regulaarsed. **Tõestada!**

Omadus 6.2. Maatriksi ja tema pöördmaatriksi determinandid on teineteise pöördarvud.

Omadus 6.3. Kui ruutmaatriksil on olemas pöördmaatriks, siis ainult üks. **Tõestada!**

Omadus 6.4. Regulaarsete n-järku maatriksite A ja B korral kehtib valem

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Omadus 6.5. Maatriksi A^{-1} pöördmaatriksiks on maatriks A, s. t. $(A^{-1})^{-1} = A$.

Omadus 6.6. Ühikmaatriksi E pöördmaatriks on ta ise, s. t. $E^{-1} = E$.

Omadus 6.7. Maatriksi transponeerimine ja pöördmaatriksi leidmise operatsioon on kommuteeruvad ehk vahetatavad, s. t. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Vektorruum

30. november 2007. a.
22:41

Definitsioon 7.1. Mittetühja hulka V nimetame vektorruumiks üle reaalarvude $\mathbb{R}$, kui hulgal V on järgmine ehitus:

I On antud kujutus

$$+ : V \times V \longrightarrow V; \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto \mathbf{x} + \mathbf{y},$$

mida nimetame (hulga V) elementide liitmiseks.

II On antud kujutus

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V; \qquad (\lambda, \mathbf{x}) \longmapsto \lambda\mathbf{x},$$

mida nimetame (hulga V) elemendi korrutamiseks reaalarvuga (vasakult) ehk reaalarvu ja (hulga V) elemendi korrutamiseks.

III Elementide liitmine ja reaalarvuga korrutamine peavad rahuldama järgmisi aksioome:

1° Elementide liitmine on assotsiatiivne, s. t. iga $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ korral kehtib

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}).$$

2° Hulgas V leidub selline element, mida nimetame nullelemendiks ja tähistame $\mathbf{0}$ abil, et iga $\mathbf{x} \in V$ korral kehtivad seosed

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}, \qquad \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

3° Iga elemendi $\mathbf{x} \in V$ korral leidub hulgas V selline element, mida nimetame elemendi $\mathbf{x}$ vastandelemendiks ja tähistame $-\mathbf{x}$ abil, et kehtivad seosed

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \qquad (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

4° Elementide liitmine on kommutatiivne, s.t. iga $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ korral

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}.$$

5° Iga $\mathbf{x} \in V$ korral
$$1\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

6° Iga $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ja iga $\mathbf{x} \in V$ korral
$$(\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu\mathbf{x}).$$

7° Iga $\lambda \in \mathbb{R}$ ja iga $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ korral
$$\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}.$$

8° Iga $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ja iga $\mathbf{x} \in V$ korral
$$(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}.$$

Definitsioon 7.2. Elementide $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ vaheks $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ nimetatakse elementi
$$\mathbf{x} - \mathbf{y} := \mathbf{x} + (-\mathbf{y}).$$

Vektorruumi alamruum. Lineaarkate.

30. november 2007. a.
23:03

Definitsioon 8.1. Utleme, et vektorruumi V tehted on teheteks tema (mittetühjal) alamhulgal Q, kui

1) iga $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$ korral summa $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in Q$;

2) iga $\lambda \in \mathbb{R}$ ja iga $\mathbf{x} \in Q$ korral $\lambda \mathbf{x} \in Q$.

Definitsioon 8.2. Me nimetame vektorruumi V mittetühja alamhulka Q tema alamruumiks, kui Q on V tehete – liitmise ja arvuga korrutamise – suhtes vektorruum (üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$).

Teoreem 8.1. Vektorruumi V mittetühi alamhulk Q on tema alamruum siis ja ainult siis, kui vektorruumi V tehted on alamruumi Q teheteks.

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q \Longrightarrow \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \in Q.$$

Näited:

1° Vektorruum V on iseenda alamruum.

2° Vektorruumi V nullelemendist koosnev alamhulk $\{\mathbf{0}\}$ on vektorruumi V alamruum.

3° Olgu $\mathbf{a} \in V$. Siis hulk $\{\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ on vektorruumi V alamruum.

Paneme tähele, et vektorruumi V mistahes alamruum sisaldab endas vektorruumi V nullelementi $\mathbf{0}$. Seega, vektorruumi kõigi alamruumide ühisosa ei ole tühi. Samuti ei ole siis ka tühi kahe, kolme, nelja jne. alamruumi ühisosa.

Teoreem 8.2. Vektorruumi V mistahes kahe alamruumi Q_1 ja Q_2 ühisosa $Q_1 \cap Q_2$ on samuti vektorruumi V alamruum.

Lineaarkate:

Definitsioon 8.3. Olgu $m \in \mathbb{N}$ ja $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ vektorruumi V elemendid. Hulka

$$L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m) :=$$
$$= \{\mathbf{x} = \xi_1 \mathbf{a}_1 + \xi_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \xi_m \mathbf{a}_m \mid \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \in \mathbb{R}\}$$

nimetatakse vektorruumi V lineaarkatteks moodustajatega $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$.

Teoreem 8.3. Lineaarkate $L(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m})$, kus $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m} \in V$, on vektorruumi V alamruum.

Tõestada!

Lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

1. detsember 2007. a.
13:43

Olgu V vektorruum ja $m \in \mathbb{N}$.

Definitsioon 9.1. Elementide $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m} \in V$ komplekti $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}\}$, kus on fikseeritud elementide järjekord, nimetatakse elementide $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}$ poolt moodustatud vektorsüsteemiks.

Definitsioon 9.2. Võrrandit kujul

$$\xi_1 \mathbf{a_1} + \xi_2 \mathbf{a_2} + \cdots + \xi_m \mathbf{a_m} = \mathbf{0},$$

kus $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}\}$ on ette antud vektorsüsteem ja $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \in \mathbb{R}$ on otsitavad, nimetatakse vektorsüsteemi $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}\}$ poolt määratud vektorvõrrandiks.

Komplekt $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \ldots, \xi_m = 0$ on selle vektorvõrrandi null-lahend.

Definitsioon 9.3. Vektorsüsteemi $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}\}$ nimetame lineaarselt sõltuvaks (lineaarselt sõltumatuks), kui vektorvõrrandil

$$\xi_1 \mathbf{a_1} + \xi_2 \mathbf{a_2} + \cdots + \xi_m \mathbf{a_m} = \mathbf{0}$$

on rohkem kui üks lahend (ainult üks lahend).

Teoreem 9.1. Uheelemendiline vektorsüsteem $\{\mathbf{a}\}$ on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui $\mathbf{a}$ on nullelement, s. t. kui $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Tõestada!

Teoreem 9.2. Vektorsüsteem $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}\}$, milles on vähemalt kaks elementi (s. t. $m \geq 2$), on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui selle vektorsüsteemi mingi element on avaldatav selle vektorsüsteemi ülejäänud elementide kaudu.

Olgu meil vektorsüsteem $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_m}\}$ ja arvud $k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}_m$ selliselt, et $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.

Definitsioon 9.5. Vektorsüsteemi $\{\mathbf{a_{i_1}}, \mathbf{a_{i_2}}, \dots, \mathbf{a_{i_k}}\}$ nimetame vektorsüsteemi $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_m}\}$ alamsüsteemiks.

Teoreem 9.3. Vektorsüsteem, millel on lineaarselt sõltuv alamsüsteem, on lineaarselt sõltuv.

Järeldus 9.3. Lineaarselt sõltumatu vektorsüsteemi kõik alamsüsteemid on lineaarselt sõltumatud.

Järeldus 9.4. Vektorsüsteem, mis sisaldab nullelementi, on lineaarselt sõltuv.

Järeldus 9.5. Lineaarselt sõltumatu vektorsüsteem ei sisalda nullelementi.

Vektorruumi baas

1. detsember 2007. a.
14:24

Definitsioon 10.1. Vektorruumi V elementidest moodustatud vektorsüsteemi

$$\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$$

nimetatakse vektorruumi V baasiks, kui:

1) see vektorsüsteem on lineaarselt sõltumatu;

2) vektorruumi V iga element avaldub selle vektorsüsteemi elementide kaudu.

Teoreem 10.1. Vektorruumi kõikides baasides on sama palju elemente.

Definitsioon 10.2. Vektorruumi, millel puuduvad baasid, nimetatakse lõpmatumõõtmeliseks ehk lõpmatudimensionaalseks vektorruumiks.

Definitsioon 10.3. Vektorruumi, millel on baas(id) olemas, nimetatakse lõplikumõõtmeliseks ehk lõplikudimensionaalseks vektorruumiks. Elementide arvu vektorruumi baasis nimetatakse vektorruumi mõõtmeks ehk dimensiooniks.

Vektorruumi V mõõdet tähistatakse $dimV$.

Definitsioon 10.4. Vektorruumi V nimetatakse n-mõõtmeliseks ehk n-dimensionaalseks, kui $dimV = n$.
n-mõõtmelist vektorruumi tähistatakse sageli ka V_n abil.

Definitsioon 10.5. Kordajaid $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avaldises

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + \cdots + x_n\mathbf{e_n}$$

nimetatakse elemendi $\mathbf{x}$ koordinaatideks baasil $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$.

Teoreem 10.2. Elemendi koordinaadid igal baasil määratakse üheselt.
Tõestada!

Teoreem 10.3. Elementide liitmisel, lahutamisel ja arvuga korrutamisel tuleb elementide koordinaadid vastavalt liita, lahutada ja sama arvuga korrutada.

Baasiteisendusmaatriks:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definitsioon 10.6. Maatriksit A nimetatakse baasiteisenduse maatriksiks üleminekul vanalt baasilt uuele baasile. Vahel nimetatakse maatriksit A ka lihtsalt baasiteisenduse maatriksiks.

Lause 10.1. Baasiteisenduse maatriks on regulaarne.

Me saame seosed koordinaatide vahel uuel ja vanal baasil baasiteisenduse maatriksi abil lühidalt kirja panna järgmiselt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \\ \dots \\ x_n{}' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \\ \dots \\ x_n{}' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Lineaarvõrrandisüsteem

1. detsember 2007. a.
14:46

Definitsioon 11.1. Võrrandisüsteemi

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= a_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= a_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n &= a_i, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= a_m,
\end{aligned} \tag{1}
$$

kus $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on tundmatud ehk otsitavad ning tundmatute kordajad a_{ij}, $i \in \mathbb{N}_m$, $j \in \mathbb{N}_m$ ja vabaliikmed $a_1, a_2, \ldots, a_m$ on (ette antud) reaalarvud, nimetatakse lineaarvõrrandisüsteemiks.

Definitsioon 11.2. Lineaarvõrrandisüsteemi (1) nimetatakse homogeenseks, kui kõik vabaliikmed on võrdsed nulliga, s.t. $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$, ja mittehomogeenseks, kui vähemalt üks vabaliige on nullist erinev.

Definitsioon 11.3. Maatrikseid

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & a_m \end{pmatrix}
$$

nimetatakse vastavalt lineaarvõrrandisüsteemi (1) maatriksiks ja lineaarvõrrandisüsteemi (1) laiendatud maatriksiks.

Definitsioon 11.4. Fikseeritud reaalarvude komplekti $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ nimetatakse lineaarvõrrandisüsteemi (1) lahendiks ehk erilahendiks, kui nende arvude asendamisel süsteemi (1) võrranditesse tundmatute asemele saame samasused.

Definitsioon 11.5. Lineaarvõrrandisüsteemi (1) nimetatakse lahenduvaks, kui tal leidub vähemalt üks lahend. Lineaarvõrrandisüsteemi (1) nimetatakse vastuoluliseks ehk vasturääkivaks, kui süsteemil (1) ei ole lahendeid.

Definitsioon 11.6. Lineaarvõrrandisüsteemi elementaarteisendusteks nimetatakse:

1) tema mistahes võrrandi korrutamist nullist erineva reaalarvuga;

2) tema mingile võrrandile teise mistahes arvuga läbikorrutatud võrrandi liitmist.

Crameri peajuht

1. detsember 2007. a.
16:03

Definitsioon 13.1. Öeldakse, et meil on tegemist Crameri peajuhuga, kui lineaarvõrrandisüsteemis on tundmatuid ja võrrandeid sama palju ning süsteemi maatriks on regulaarne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0$$

Tähistame $D := |A|$ ning

$$D_i := \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & a_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & a_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a_n & a_{1,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \forall \quad i \in \mathbb{N}_n.$$

Viimases valemis on determinandi arvutamisel i-s veerg maatriksis A asendatud vabaliikmete veeruga.

Eelpooltoodud tähistusi kasutades saame lineaarvõrrandisüsteemi lahendamiseks n.n. Crameri valemid

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad \forall \quad i \in \mathbb{N}_n.$$

Crameri peajuhu tingimusi rahuldava lineaarvõrrandisüsteemi lahendamist Crameri valemite abil nimetatakse ka Crameri reegli kasutamiseks.

Suunatud lõikude vektorruum

1. detsember 2007. a.
16:16

Definitsioon 14.1. Lõiku, millel on fikseeritud alguspunkt, s.o. suund, nimetatakse suunatud lõiguks ehk seotud vektoriks. Seotud vektorit alguspunktiga X ja lõpp-punktiga Y tähistame edaspidi $\overline{XY}$ abil. Kõigi seotud vektorite hulka tähistame $\overline{E}$ abil.

Mainime, et me lubame ka juhtumit, kus lõigu algus- ja lõpp-punkt langevad kokku. Sellist lõiku nimetatakse kidunud lõiguks (näiteks $\overline{XX}$). Kidunud lõigu korral ei ole lõigu suund üheselt määratud.

Definitsioon 14.2. Seotud vektorit, mille algus- ja lõpp-punkt langevad kokku, nimetatakse seotud nullvektoriks.

Definitsioon 14.3. Seotud vektori $\overline{XY}$ pikkuseks, tähis $|\overline{XY}|$, nimetame teda määrava lõigu XY pikkust, s.t. $|\overline{XY}| := |XY|$.

Definitsioon 14.4. Seotud vektorit $\overline{YX}$ nimetame seotud vektori $\overline{XY}$ vastandvektoriks. Seotud vektori $\overline{XY}$ vastandvektorit tähistame $-\overline{XY}$ abil, s.t.

$$-\overline{XY} := \overline{YX}.$$

Definitsioon 14.5. Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetame kollineaarseks seotud vektoriga $\overline{CD}$, kui lõik AB on paralleelne lõiguga CD. Öeldut tähistame $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ abil.

Kollineaarsuse omadused:

1° Refleksiivsus: $\overline{AB} \in \overline{E_0} \Longrightarrow \overline{AB} \parallel \overline{AB}$.

2° Transitiivsus:
$$\overline{AB} \parallel \overline{CD}, \quad \overline{CD} \parallel \overline{EF}, \quad \overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF} \in \overline{E_0} \Longrightarrow \overline{AB} \parallel \overline{EF}.$$

3° Sümmeetria: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}, \quad \overline{AB}, \overline{CD} \in \overline{E_0} \Longrightarrow \overline{CD} \parallel \overline{AB}$.

Definitsioon 14.6. Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetame samasuunaliseks (vastassuunaliseks) seotud vektoriga $\overline{CD}$, kui esiteks $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ja teiseks $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ suunad on ühesugused (suunad on vastupidised). Öeldut tähistame $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ ($\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$) abil.

Definitsioon 14.7. Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetame ekvivalentseks seotud vektoriga $\overline{CD}$ ja tähistame $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ abil, kui

$$|\overline{AB}| = |\overline{CD}|, \quad \overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}.$$

Ekvivalentsusel on kollineaarsusega samasugused omadused.

Definitsioon 14.8. Seotud vektoriga $\overline{AB} \in \overline{E}_0$ ekvivalentsete seotud vektorite hulka $\{\overline{XY} : \overline{XY} \sim \overline{AB}\}$ nimetame ekvivalentsiklassiks moodustajaga $\overline{AB}$. Ekvivalentsiklassi moodustajaga $\overline{AB}$ tähistame $\overrightarrow{AB}$ abil. Seega

$$\overrightarrow{AB} := \{\overline{XY} : \overline{XY} \sim \overline{AB}\}.$$

Definitsioon 14.9. Hulga **E** elemente, täpsemalt hulga $\overline{E}$ ekvivalentsiklasse, nimetame edaspidi vabavektoriteks ehk lühidalt vektoriteks.

Definitsioon 14.10. Vektori $\vec{x}$ pikkuseks, tähistame $|\vec{x}|$ abil, nimetatakse (suvalise) seotud vektori $\overline{AB} \in \vec{x}$ pikkust, s.t.

$$|\vec{x}| := |\overline{AB}|.$$

Definitsioon 14.11. Olgu $\overline{AB} \in \vec{x}, \overline{A'B'} \in \vec{y}$. Vektorit $\vec{x}$ nimetame 1) kollineaarseks, 2) samasuunaliseks, 3) vastassuunaliseks vektoriga $\vec{y}$, kui vastavalt

$$1)\ \overline{AB} \parallel \overline{A'B'}, \quad 2)\ \overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{A'B'}, \quad 3)\ \overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{A'B'}$$

ning tähistame

$$1)\ \vec{x} \parallel \vec{y}, \quad 2)\ \vec{x} \uparrow\uparrow \vec{y}, \quad 3)\ \vec{x} \uparrow\downarrow \vec{y}.$$

Definitsioon 14.12. Vektorite $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ summaks nimetatakse vektorit $\vec{z} \in \mathbf{E}$, mis saadakse järgmisel teel:
1) valime mingi punkti $A \in E$ ning leiame sellise punkti $B \in E$, et $\overline{AB} \in \vec{x}$;
2) leiame sellise punkti $C \in E$, et $\overline{BC} \in \vec{y}$;
3) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{z} := \overrightarrow{AC}$.

Definitsioon 14.13. Reaalarvu ξ ja vektori $\vec{x}$ korrutiseks $\xi\vec{x}$ nimetatakse vektorit, mis määratakse tingimustega

$$1^\circ \quad |\xi\vec{x}| = |\xi||\vec{x}|,$$

$$2^\circ \quad (\xi\vec{x}) \uparrow\uparrow \vec{x}, \text{ kui } \quad \xi > 0, \quad (\xi\vec{x}) \uparrow\downarrow \vec{x}, \text{ kui } \quad \xi < 0.$$

Projektsioon

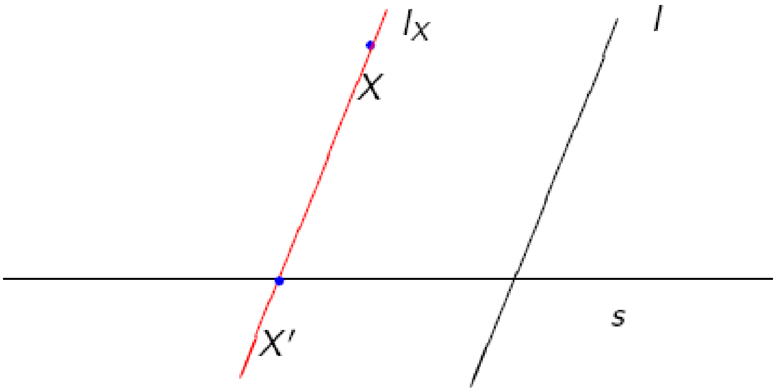
1. detsember 2007. a.
16:49

Olgu tasandil E_2 (või ruumis E_3) fikseeritud mingi sirge s.
Fikseerime sirge l (tasandi π), mis lõikab sirget s täpselt ühes punktis. Mistahes punkti $X \in E_2$ ($X \in E_3$) korral võtame punkti X läbiva sirge l_X (tasandi π_X), mis on paralleelne sirgega l (tasandiga π), s.o.

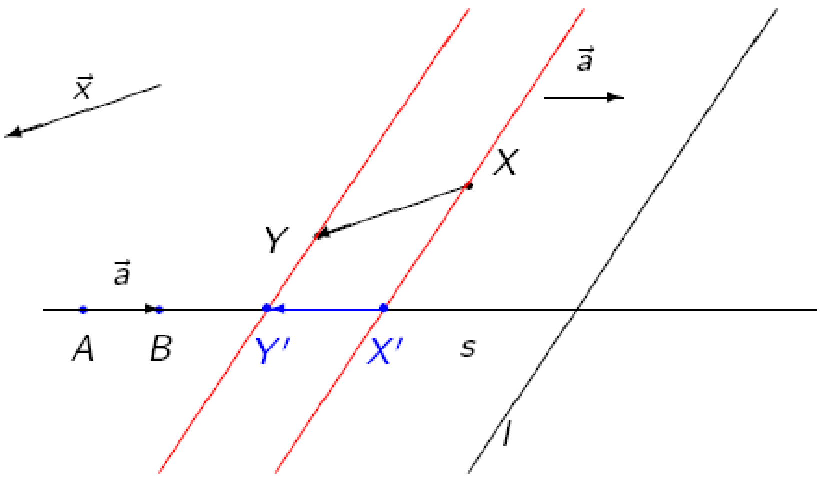
$$X \in l_X, l_X \parallel l; \quad (X \in \pi_X, \pi_X \parallel \pi).$$

Tähistame tekkinud lõikepunkti $s \cap l_X$ ($s \cap \pi_X$) sümboliga X'.

Definitsioon 15.1. Punkti X' nimetame punkti X *projektsiooniks* sirgel s paralleelselt sirgega l (tasandiga π).



Olgu $\vec{a} \in \mathbf{E}_2$ ($\vec{a} \in \mathbf{E}_3$) nullvektorist erinev vektor. Fikseerime vabalt mingi punkti $A \in E_2$ ($A \in E_3$). Siis leidub punkt $B \in E_2$ ($B \in E_3$) selliselt, et $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Lõik AB määrab üheselt sirge s, millele AB kuulub.



Olgu sirge l (tasand π) selline, et ta lõikab sirget s täpselt ühes punktis. Olgu $\vec{x}$ mingi vektor ning $X \in E_2$ ($X \in E_3$). Siis leidub $Y \in E_2$ ($Y \in E_3$) selliselt, et $\overrightarrow{XY} = \vec{x}$. Leiame punktide X ja Y projektsioonid sirgel s.

Definitsioon 15.2. Vektorit $\overrightarrow{X'Y'}$ nimetame vektori $\vec{x}$ projektsioonivektoriks vektori $\vec{a}$ sihile paralleelselt sirgega l (tasandiga π).
Projektsioonivektorit $\overrightarrow{X'Y'}$ tähistame $Pr_{\vec{a}}\vec{x}$ $(\| \, l)$ $(Pr_{\vec{a}}\vec{x}(\| \, \pi))$.

Kui tekstist on selge paralleelselt millise sirgega (tasandiga) projektsioonivektor leitakse, siis kasutame lühemat tähist $Pr_{\vec{a}}\vec{x}$ $(Pr_{\vec{a}}\vec{x})$.

Omadus 15.1. Vektorite summa projektsioonivektor on võrdne nende vektorite projektsioonivektorite summaga, s.o. Tõestada!

$$Pr_{\vec{a}}(\vec{x}+\vec{y}) = Pr_{\vec{a}}\vec{x} + Pr_{\vec{a}}\vec{y}.$$

Omadus 15.2. Mistahes reaalarvu $\xi \in \mathbb{R}$ ja mistahes vektori $\vec{x}$ korral

$$Pr_{\vec{a}}(\xi\vec{x}) = \xi Pr_{\vec{a}}\vec{x}.$$

Definitsioon 15.3. Projektsioonivektorit $Pr_{\vec{a}}\vec{x}$ nimetame ristprojektsioonivektoriks, kui sirge l (tasand π) on risti sirgega s.

Definitsioon 15.4. Vektori $\vec{x}$ projektsiooniks vektori $\vec{a} \neq \vec{0}$ sihile nimetatakse reaalarvu, mida tähistame $pr_{\vec{a}}\vec{x}$ abil ja anname valemiga

$$pr_{\vec{a}}\vec{x} := \begin{cases} |Pr_{\vec{a}}\vec{x}|, & \text{kui } Pr_{\vec{a}}\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{a}; \\ -|Pr_{\vec{a}}\vec{x}|, & \text{kui } Pr_{\vec{a}}\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{a}. \end{cases}$$

Definitsioon 15.5. Vektorit pikkusega üks nimetatakse ühikvektoriks.

Projektsioonivektori ja projektsiooni vaheline seos:

$$Pr_{\vec{a}}\vec{x} = (pr_{\vec{a}}\vec{x})\overrightarrow{a_\circ}.$$

Omadus 15.3. Vektorite summa projektsioon on võrdne nende vektorite projektsioonide summaga, s.t.

$$pr_{\vec{a}}(\vec{x}+\vec{y}) = pr_{\vec{a}}\vec{x} + pr_{\vec{a}}\vec{y}.$$

Omadus 15.4. Mistahes reaalarvu $\xi \in \mathbb{R}$ ja mistahes vektori $\vec{x}$ korral

Tõestada!

$$pr_{\vec{a}}(\xi\vec{x}) = \xi pr_{\vec{a}}\vec{x}.$$

Definitsioon 15.6. Projektsiooni $pr_{\vec{a}}\vec{x}$ nimetame ristprojektsiooniks, kui sirge l (tasand π) on risti sirgega s.

Olgu meil tasandil E_2 (ruumis E_3) nullvektoritest erinevad vektorid $\vec{x}, \vec{y}$ ning punkt A. Siis leiduvad punktid $B, C \in E_2$ $(B, C \in E_3)$ selliselt, et $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$ ja $\overrightarrow{AC} = \vec{y}$.

Definitsioon 15.7. Vektorite $\vec{x} \neq \vec{0}$ ja $\vec{y} \neq \vec{0}$ vaheliseks nurgaks nimetame nurka, mis tekib lõigu AB pööramisel ümber punkti A lühemat teed pidi lõigule AC. Tähistame seda nurka $\angle(\vec{x}, \vec{y})$ abil.

Definitsioon 15.8. Kui vektoritest $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ vähemalt üks on nullvektor, siis nurgaks $\angle(\vec{x}, \vec{y})$ loeme ükskõik millist reaalarvu lõigust $[0, \pi]$.

Definitsioon 15.9. Me ütleme, et vektor $\vec{x}$ on risti vektoriga $\vec{y}$, kui $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\pi}{2}$. Seda asjaolu tähistame $\vec{x} \perp \vec{y}$ abil.

Ristprojektsiooni korral kehtib valem

$$pr_{\vec{a}}\vec{x} = |\vec{x}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{a}).$$

Baas ja reeper

2. detsember 2007. a.
19:39

Teoreem 16.1. Ühevektoriline vektorsüsteem $\{\vec{a}\}$ on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui vektor $\vec{a}$ on nullvektor, s.t. $\vec{a} = \vec{0}$.

Teoreem 16.2. Kahevektoriline vektorsüsteem $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}\}$ on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui vektor $\vec{a_1}$ on kollineaarne vektoriga $\vec{a_2}$.

Definitsioon 16.1. Vektorsüsteemi $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$ nimetatakse komplanaarseks, kui neid vektoreid määravad lõigud on paralleelsed mingi tasandiga.

Teoreem 16.3. Kolmevektoriline vektorsüsteem $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$ on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui see vektorsüsteem on komplanaarne.

Teoreem 16.4. Vektorruumide $\mathbf{E_1}, \mathbf{E_2}$ ja $\mathbf{E_3}$ baasideks on vastavalt mistahes vektorsüsteem $\{\vec{e_1}\}$, mille vektor $\vec{e_1}$ ei ole nullvektor, mistahes kahest mittekollineaarsest vektorist koosnev vektorsüstem $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ ja mistahes kolmest mittekomplanaarsest vektorist koosnev vektorsüsteem $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$.

Definitsioon 16.2. Hulki $\{O; \vec{e_1}\}$, $\{O; \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ ja $\{O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ nimetatakse vastavalt sirge E_1, tasandi E_2 ja ruumi E_3 reeperiks ehk koordinaatsüsteemiks, kui $\{\vec{e_1}\}$, $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ ja $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ on vastavalt vektorruumide $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$ ja $\mathbf{E_3}$ baasid. Punkti $O \in E_i$ nimetatakse reeperi ehk koordinaatsüsteemi alguspunktiks.

Definitsioon 16.3. Baasi nimetame ristbaasiks, kui temasse kuuluvad vektorid on paarikaupa risti ja pikkusega 1.

Definitsioon 16.4. Reeperit nimetame ristreeperiks, kui temasse kuuluv baas on ristbaas.

Olgu $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ vektorruumi $\mathbf{E_2}$ baas. Rakendame need vektorid mingist punktist $K \in E_2$. Siis leiduvad sobivad punktid $A_1, A_2 \in E_2$, et

$$\overrightarrow{KA_1} = \vec{e_1}, \quad \overrightarrow{KA_2} = \vec{e_2}.$$

Definitsioon 16.5. Vektorruumi $\mathbf{E_2}$ baasi $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ nimetame parema käe (vasaku käe) baasiks kui seotud vektori $\overline{KA_1}$ pööre lühemat teed pidi ümber punkti K seotud vektorini $\overline{KA_2}$ toimub kellaosuti liikumise suunale vastupidises suunas (kellaosuti liikumise suunas).

Definitsioon 16.6. Vektorruumi $\mathbf{E}_2$ reeperit $\{O; \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ nimetame parema käe (vasaku käe) reeperiks, kui temasse kuuluv baas $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ on parema käe (vasaku käe) baas.

Olgu nüüd $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ vektorruumi $\mathbf{E}_3$ baas. Rakendame need vektorid mingist punktist $K \in E_3$. Siis leiduvad punktid $A_1, A_2, A_3 \in E_3$, et

$$\overrightarrow{KA_1} = \vec{e_1}, \quad \overrightarrow{KA_2} = \vec{e_2}, \quad \overrightarrow{KA_3} = \vec{e_3}.$$

Definitsioon 16.7. Vektorruumi $\mathbf{E}_3$ baasi $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ nimetatakse parema käe (vasaku käe) baasiks, kui seotud vektori $\overline{KA_1}$ pööre lühemat teed pidi seotud vektorini $\overline{KA_2}$ jälgituna seotud vektori $\overline{KA_3}$ lõpp-punktist A_3 toimub kellaosuti liikumise suunale vastupidises suunas (kellaosuti liikumise suunas).

Definitsioon 16.9. Mistahes punkti $X \in E$ kohavektoriks ruumi $\mathbf{E}$ reeperi suhtes nimetatakse vektorit $\overrightarrow{OX} \in \mathbf{E}$, kus O on ruumi $\mathbf{E}$ reeperi alguspunkt.

Definitsioon 16.10. Punkti $X \in E$ koordinaatideks valitud reeperi suhtes nimetatakse tema kohavektori $\overrightarrow{OX}$ koordinaate reeperisse kuuluva baasi suhtes.

Rööplükke ehk paralleellükke

$$\{O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\} \longrightarrow \{O'; \vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'\}, \quad \vec{e_1}' = \vec{e_1}, \quad \vec{e_2}' = \vec{e_2}, \quad \vec{e_3}' = \vec{e_3}$$

korral aga

$$x_1 = x_1' + c_1, \quad x_2 = x_2' + c_2, \quad x_3 = x_3' + c_3.$$

Skalaarkorrutamine

2. detsember 2007. a.
20:00

Definitsioon 17.1. Vektorite $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{E}$ skalaarkorrutiseks $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ nimetatakse reaalarvu

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := |\vec{x}||\vec{y}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{y}).$$

Omadus 17.1. Kui skalaarkorrutises üks vektoritest on nullvektor, siis skalaarkorrutis on võrdne nulliga, s.t.

$$\langle \vec{0}, \vec{y} \rangle = 0, \quad \langle \vec{x}, \vec{0} \rangle = 0.$$

Omadus 17.2. Skalaarkorrutamine on kommutatiivne, s.t.

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle.$$

Tõestada!

Omadus 17.3. Skalaarkorrutamine ja ristprojektsioon on seotud järgmiselt:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}|\, pr_{\vec{x}} \vec{y}, \quad \vec{x} \neq \vec{0}$$

ja

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{y}|\, pr_{\vec{y}} \vec{x}, \quad \vec{y} \neq \vec{0}.$$

Omadus 17.4. Iga $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in \mathbf{E}$ korral kehtib

$$\langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle.$$

Tõestada!

Järeldus 17.1. Iga $\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathbf{E}$ korral kehtib

$$\langle \vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}_1 \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y}_2 \rangle.$$

Omadus 17.5. Iga $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{E}$ ja iga $\xi \in \mathbb{R}$ korral kehtib

$$\langle \xi \vec{x}, \vec{y} \rangle = \xi \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

Järeldus 17.2. Iga $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{E}$ ja iga $\xi \in \mathbb{R}$ korral kehtib

$$\langle \vec{x}, \xi \vec{y} \rangle = \xi \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

Omadus 17.6. Vektor $\vec{x}$ on risti vektoriga $\vec{y}$ siis ja ainult siis, kui nende vektorite skalaarkorrutis on null, s.t.

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Longleftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0.$$

Omadus 17.7. Iga vektori $\vec{x} \in \mathbf{E}$ pikkus avaldub valemiga

$$|\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}.$$

	$\mathbf{E}_1$	$\mathbf{E}_2$	$\mathbf{E}_3$
ristbaas	$\{\vec{e_1}\}$	$\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$	$\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$
$\vec{x}$ koordinaadid	(x_1)	(x_1, x_2)	(x_1, x_2, x_3)
$\vec{y}$ koordinaadid	(y_1)	(y_1, y_2)	(y_1, y_2, y_3)
$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$	x_1y_1	$x_1y_1 + x_2y_2$	$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$
$\|\vec{x}\|$	$\|x_1\|$	$\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}$	$\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$
$pr_{\vec{x}}\vec{y}$	$\dfrac{x_1y_1}{\|x_1\|}$	$\dfrac{x_1y_1 + x_2y_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}}$	$\dfrac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}}$

Ristreeperis kehtivad veel valemid:

Ruumis E_3 saame $\vec{x} \perp \vec{y} \Longleftrightarrow x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$

Vektorkorrutamine

2. detsember 2007. a.
21:44

Vektorkorrutamist saame defineerida vaid ruumis $\mathbf{E}_3$.

Olgu $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$ mittekomplanaarne vektorsüsteem ning $A \in E_3$ mingi punkt. Siis leiduvad sellised punktid $A_1, A_2, A_3 \in E_3$, et

$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{a_1}, \quad \overrightarrow{AA_2} = \vec{a_2}, \quad \overrightarrow{AA_3} = \vec{a_3}.$$

Definitsioon 18.1. Mittekomplanaarset kolmevektorilist vektorsüsteemi $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$ nimetame parema (vasaku) käe kolmikuks, kui vaadelduna punktist A_3 toimub seotud vektori $\overline{AA_1}$ pööre seotud vektorini $\overline{AA_2}$ lühemat teed pidi kellaosuti liikumise suunale vastupidises suunas (kellaosuti liikumise suunas).

Definitsioon 18.2. Vektorite $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{E}_3$ vektorkorrutiseks, mida tähistame $\vec{x} \times \vec{y}$ abil, nimetatakse vektorit, mis määratakse kolme tingimusega:

1) $|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}| \sin \angle(\vec{x}, \vec{y})$,

2) $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{x}, \quad \vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{y}$

3) vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}\}$ on parema käe kolmik.

Omadus 18.1. Vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui vektorkorrutis $\vec{x} \times \vec{y}$ on võrdne nullvektoriga.

Lähtudes lineaarselt sõltumatust vektorsüsteemist $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ ning punktist $A \in E_3$, leiame sellised punktid $X, Y \in E_3$, et

$$\overrightarrow{AX} = \vec{x}, \quad \overrightarrow{AY} = \vec{y}.$$

Konstrueerime nüüd rööpküliku, mille servadeks on lõigud AX ja AY.

Definitsioon 18.3. Eelpool konstrueeritud rööpkülikut nimetame vektoritele $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ ehitatud rööpkülikuks (punktis A).

Omadus 18.2. Olgu vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ lineaarselt sõltumatu. Vektoritele $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ ehitatud rööpküliku pindala $S_{rk}(\vec{x}, \vec{y})$ on võrdne servavektorite vektorkorrutise pikkusega, s.t.

$$S_{rk}(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} \times \vec{y}|.$$

Omadus 18.3. Vektorkorrutamine on kaldsümmeetriline, s.t.

$$\vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x}).$$

Tõestada!

Omadus 18.4. Mistahes reaalarvu $\xi \in \mathbb{R}$ ja mistahes vektorite $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{E}_3$ korral kehtib

$$(\xi\vec{x}) \times \vec{y} = \xi(\vec{x} \times \vec{y}).$$

Järeldus 18.2. Mistahes reaalarvu $\xi \in \mathbb{R}$ ja mistahes vektorite $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{E}_3$ korral kehtib valem

$$\vec{x} \times (\xi\vec{y}) = \xi(\vec{x} \times \vec{y}).$$

Omadus 18.5. Mistahes kolme vektori $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{y} \in \mathbf{E}_3$ korral kehtib valem

$$(\vec{x_1} + \vec{x_2}) \times \vec{y} = \vec{x_1} \times \vec{y} + \vec{x_2} \times \vec{y}.$$

Järeldus 18.3. Mistahes kolme vektori $\vec{x}, \vec{y_1}, \vec{y_2} \in \mathbf{E}_3$ korral kehtib valem

$$\vec{x} \times (\vec{y_1} + \vec{y_2}) = \vec{x} \times \vec{y_1} + \vec{x} \times \vec{y_2}.$$

Vektorkorrutise leidmine koordinaatide ristbaasis:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Segakorrutamine

3. detsember 2007. a.
15:27

Definitsioon 19.1. Kolme vektori $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{E}_3$ segakorrutiseks nimetatakse reaalarvu, mida tähistatakse $\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ abil ja mis antakse valemiga

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} := \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle.$$

Omadus 19.1. Vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui segakorrutis $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = 0$.

Olgu nüüd vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ lineaarselt sõltumatu. Mistahes punkti $A \in E_3$ korral leiduvad sobivad punktid $X, Y, Z \in E_3$ selliselt, et

$$\overrightarrow{AX} = \vec{x}, \quad \overrightarrow{AY} = \vec{y}, \quad \overrightarrow{AZ} = \vec{z}.$$

Moodustame rööptahuka, mille servadeks on AX, AY ja AZ.

Definitsioon 19.2. Eelpool konstrueeritud rööptahukat nimetame vektoritele $\vec{x}$, $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ ehitatud rööptahukaks.

Omadus 19.2. Mittekomplanaarse vektorsüsteemi $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ vektoritele ehitatutud rööptahuka ruumala $V_{rt}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on võrdne

$$V_{rt}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{cases} \vec{x}\vec{y}\vec{z}, & \text{kui } \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\} \text{ on parema käe kolmik} \\ -\vec{x}\vec{y}\vec{z}, & \text{kui } \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\} \text{ on vasaku käe kolmik .} \end{cases}$$

Prisma ruumala: $$V_{pr}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \frac{1}{2} V_{rt}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \frac{1}{2} |\vec{x}\vec{y}\vec{z}|,$$

Tetraeedri ruumala: $$V_{te}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \frac{1}{3} V_{pr}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \frac{1}{6} |\vec{x}\vec{y}\vec{z}|.$$

Omadus 19.3. Segakorrutamine sõltub vektorite järjekorrast järgmiselt:

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \vec{y}\vec{z}\vec{x} = \vec{z}\vec{x}\vec{y} = -\vec{y}\vec{x}\vec{z} = -\vec{z}\vec{y}\vec{x} = -\vec{x}\vec{z}\vec{y}.$$ Tõestada!

Omadus 19.4. Kehtivad valemid

$$(\vec{x_1} + \vec{x_2})\vec{y}\vec{z} = \vec{x_1}\vec{y}\vec{z} + \vec{x_2}\vec{y}\vec{z},$$

$$\vec{x}(\vec{y_1} + \vec{y_2})\vec{z} = \vec{x}\vec{y_1}\vec{z} + \vec{x}\vec{y_2}\vec{z}$$

ja

$$\vec{x}\vec{y}(\vec{z_1} + \vec{z_2}) = \vec{x}\vec{y}\vec{z_1} + \vec{x}\vec{y}\vec{z_2}.$$

Omadus 19.5. Kehtivad valemid:

$$(\xi\vec{x})\vec{y}\vec{z} = \xi\vec{x}\vec{y}\vec{z},$$

$$\vec{x}(\xi\vec{y})\vec{z} = \xi\vec{x}\vec{y}\vec{z}$$

ja

$$\vec{x}\vec{y}(\xi\vec{z}) = \xi\vec{x}\vec{y}\vec{z}.$$

Kui

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \vec{y} = (y_1, y_2, y_3), \quad \vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$$

on antud koordinaatidega parema käe ristbaasis, siis kehtib valem

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Sirgevõrrandid

3. detsember 2007. a.
16:37

Definitsioon 20.1. Sirge sihivektoriks nimetatakse sirge suvalise 2 erineva punkti poolt määratud vektorit. Sirge s sihivektori tähiseks on $\vec{s}$. Teisiti öeldes on sirge sihivektor suvaline vektor, mille moodustajaks on mingi sirgel asuv seotud nullvektorist erinev seotud vektor, s.t. $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$, kus $\overline{AB} \subset s$.

Definitsioon 20.2. Sirge s võrrandit kujul

$$s : \overrightarrow{AX} = t\vec{s}, \quad t \in \mathbb{R}$$

nimetame sirge s parameetriliseks vektorvõrrandiks. Suurust t selles võrrandis nimetame parameetriks. Sirge parameetrilise vektorvõrrandi võime üles kirjutada ka kujul

$$s = \{X | \overrightarrow{AX} = t\vec{s}, \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

Fikseerime mingi punkti $O \in E$, mida hakkame nimetama pooluseks.

Definitsioon 20.3. Punkti $X \in E$ kohavektoriks pooluse O suhtes nimetatakse vektorit $\overrightarrow{OX}$.

Definitsioon 20.8. Vektorit $\vec{n} = (A_1, A_2)$ nimetatakse sirge

$$s : A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$$

normaalvektoriks.

Et

$$\langle \vec{n}, \vec{s} \rangle = A_1s_1 + A_2s_2 = s_2s_1 - s_1s_2 = 0,$$

siis on sirge sihivektor ja normaalvektor alati risti.

Definitsioon 20.9. Sirget, mis läbib reeperi alguspunkti O ja mille sihivektoriks on vektor $\vec{e}_i$, nimetame koordinaatteljeks. Punkti O ja $\vec{e}_i$ poolt määratud koordinaattelge nimetame $O\vec{e}_i$-teljeks ehk x_i-teljeks.

Definitsioon 20.10. Me ütleme, et tasandil olev sirge on reeperi suhtes üldasendis, kui ta ei läbi reeperi alguspunkti ja ei ole paralleelne kummagi koordinaatteljega.

Tasandivõrrandid

4. detsember 2007. a.
13:08

Definitsioon 21.1. Tasandit määravat lineaarselt sõltumatut vektorsüsteemi nimetatakse tasandi rihiks.

Definitsioon 21.5. Vektorit $\vec{n} := \vec{u} \times \vec{v}$ nimetatakse tasandi normaalvektoriks.

Paneme tähele, et kui $\{O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ on ristreeper, siis

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (A_1, A_2, A_3).$$

Definitsioon 21.6. Tasandeid üldvõrranditega $x_1 = 0, x_2 = 0$ ja $x_3 = 0$ nimetatakse vastavalt x_2x_3-koordinaattasandiks, x_1x_3-koordinaattasandiks ja x_1x_2-koordinaattasandiks.

Definitsioon 21.7. Me ütleme, et tasand on üldasendis, kui ta ei ole paralleelne mitte ühegi koordinaatteljega ning ei läbi reeperi alguspunkti.

Seega, üldasendis oleva tasandi üldvõrrandis
$A_1 \neq 0, A_2 \neq 0, A_3 \neq 0, A_4 \neq 0.$

Ellips

4. detsember 2007. a.
13:24

Fikseerime tasandil E_2 kaks erinevat punkti F_1 ja F_2 ja ühe positiivse reaalarvu a selliselt, et $a > \frac{1}{2}|F_1F_2|$.

Definitsioon 24.1. Punktihulka $\{X\}$ tasandil E_2 nimetame ellipsiks, kui selle hulga iga punkt X rahuldab võrrandit

$$|F_1X| + |F_2X| = 2a.$$

Punkte F_1 ja F_2 nimetame ellipsi fookusteks.

Definitsioon 24.2.

Ellipsi kanooniline reeper:
Ristreeperi alguspunkti ehk pooluse O paigutame lõigu F_1F_2 keskpunkti. Ühikvektori $\overrightarrow{e_1}$ valime selliselt, et ta oleks samasuunaline vektoriga $\overrightarrow{F_1F_2}$. Ühikvektori $\overrightarrow{e_2}$ valime selliselt, et $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$ ning et $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ oleks parema käe ristbaas (siis $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ on parema käe ristreeper).

Definitsioon 24.3. Võrrandit

$$\epsilon : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

nimetatakse ellipsi kanooniliseks võrrandiks.

Definitsioon 24.4. Me nimetame punkti K' sümmeetriliseks punktiga K sirge l suhtes, kui sirglõik KK' on risti sirgega l ning punktid K ja K' asuvad teine teisel pool sirget l ning on võrdsel kaugusel sirgest l.

Definitsioon 24.5. Me nimetame punkti K' sümmeetriliseks punktiga K punkti A suhtes, kui punkt A poolitab lõigu KK'.

Definitsioon 24.6. Me nimetame joont γ sümmeetriliseks mingi sirge (mingi punkti) suhtes, kui joone γ iga punkti K korral ka punktiga K sümmeetriline punkt K' selle sirge (selle punkti) suhtes asub joonel γ.

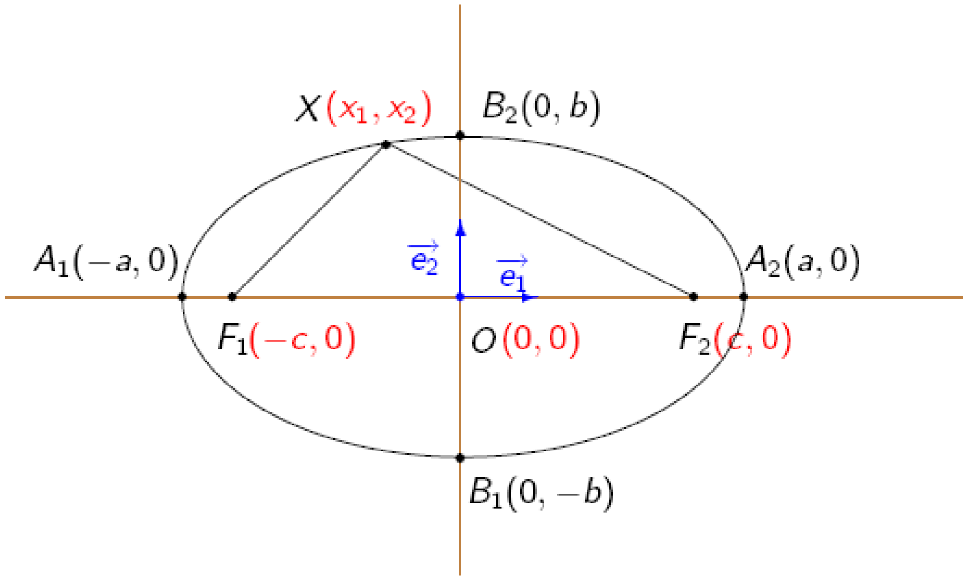
Teoreem 24.1. Ellips on sümmeetriline fookusi läbiva sirge ja fookuste vahelise lõigu keskristsirge suhtes ning nende lõikepunkti, s.t. fookuste vahelise lõigu keskpunkti, suhtes.

Definitsioon 24.7. Sirgeid, mille suhtes joon on sümmeetriline, nimetatakse joone sümmeetriatelgedeks.

Definitsioon 24.8. Punkti, mille suhtes joon on sümmeetriline, nimetatakse joone keskpunktiks.

Definitsioon 24.9. Joone lõikepunkte sümmeetriatelgedega nimetame joone tippudeks.

Ellipsi tipud on: $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$.



Definitsioon 24.10. Ellipsi samal sümmeetriateljel asuva tipupaari poolt välja eraldatud lõike ja nende pikkusi nimetame ellipsi telgedeks.

Definitsioon 24.11. Lõike A_1O, OA_2, B_1O ja OB_2 ning nende pikkusi a ja b nimetame ellipsi pooltelgedeks. Lõike A_1O, OA_2 ja nende pikkust a nimetame ellipsi suuremaks poolteljeks ning lõike B_1O, OB_2 ja nende pikkust b nimetame ellipsi väiksemaks poolteljeks.

Definitsioon 24.12. Arvu $e = \dfrac{c}{a}$ nimetame ellipsi ekstsentrilisuseks. Paneme tähele, et $e \in (0, 1)$.

Definitsioon 24.13. Ellipsi kõrgust fookuse kohal nimetame tema fokaalparameetriks.

Osutub, et ellipsi fokaalparameeter $p = \dfrac{b^2}{a}$.

Definitsioon 24.14. Ellipsi mistahes punkti kaugusi fookusteni nimetame selle punkti fokaalraadiusteks.

Olgu $M(m_1, m_2)$ mingi punkt ellipsil.

Selle punkti fokaalraadiused on:

$$r_1(M) = \left|\frac{c}{a}m_1 + a\right|, \quad r_2(M) = \left|\frac{c}{a}m_1 - a\right|$$

Olgu $X(x_1, x_2)$ ellipsi suvaline punkt ning tähistagu t nurka, mille võrra tuleb baasivektorit $\overrightarrow{e_1}$ pöörata kellaosuti liikumise suunale vastassuunas, et pööramise tulemusel saadav vektor oleks samasuunaline vektoriga $\overrightarrow{OX}$.

Osutub, et siis saab punkti X koordinaadid kirja panna järgmiselt:

$$x_1 = a\cos t, \quad x_2 = b\sin t.$$

Definitsioon 24.15. Võrrandeid

$$\epsilon : x_1 = a\cos t, \quad x_2 = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi)$$

nimetatakse ellipsi parameetrilisteks võrranditeks.

Hüperbool

4. detsember 2007. a.
20:26

Definitsioon 25.1. Punktihulka $\{X\}$ tasandil E_2 nimetame hüperbooliks, kui selle hulga iga punkt X rahuldab võrrandit

$$\Big||F_1X| - |F_2X|\Big| = 2a.$$

Punkte F_1 ja F_2 nimetame hüperbooli fookusteks.

Hüperbooli kanooniline reeper:

Ristreeperi alguspunkti ehk pooluse O paigutame lõigu F_1F_2 keskpunkti. Ühikvektori $\vec{e_1}$ valime selliselt, et ta oleks samasuunaline vektoriga $\overrightarrow{F_1F_2}$. Ühikvektori $\vec{e_2}$ valime selliselt, et $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$ ning et $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ oleks parema käe ristbaas (siis $\{O; \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ on parema käe ristreeper).

Definitsioon 25.3. Võrrandit

$$h : \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

nimetatakse hüperbooli kanooniliseks võrrandiks.

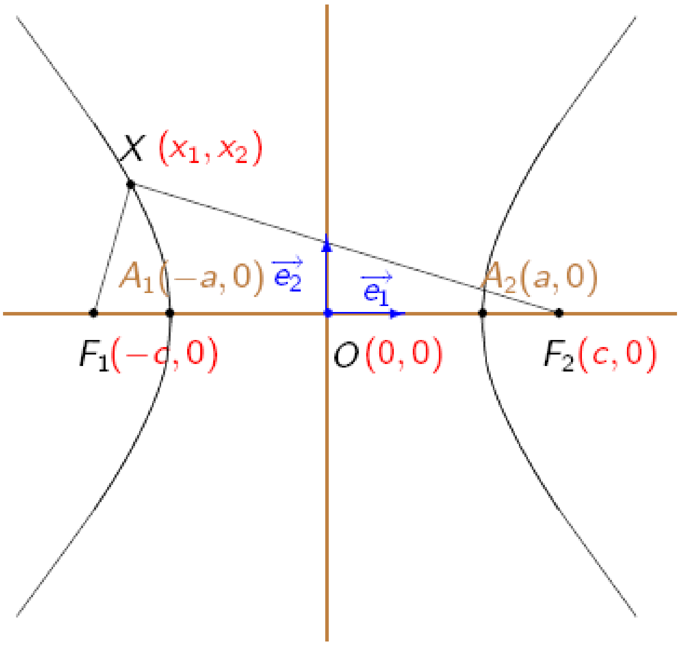
Teoreem 25.1. Hüperbool on sümmeetriline fookusi läbiva sirge ja fookuste vahelise lõigu keskristsirge suhtes ning nende lõikepunkti, s.t. fookuste vahelise lõigu keskpunkti, suhtes.

Leiame hüperbooli kanoonilisest võrrandist asenduste $x_1 = 0$ ja $x_2 = 0$ teel hüperbooli tipud. Nendeks on

$$A_1(-a, 0), \quad A_2(a, 0)$$

Teine sümmeetriatelg hüperbooli ei lõika.

Definitsioon 25.4. Punkte $B_1(0, -b)$ ja $B_2(0, b)$ nimetame hüperbooli imaginaarseteks tippudeks ehk hüperbooli ebatippudeks.



Definitsioon 25.5. Hüperbooli samal sümmeetriateljel asuva tipupaari (ebatipupaari) poolt välja eraldatud lõiku ja tema pikkust nimetame hüperbooli (reaal)teljeks (ebateljeks).

Definitsioon 25.6. Lõike A_1O, OA_2, B_1O ja OB_2 ning nende pikkusi a ja b nimetame hüperbooli pooltelgedeks. Lõike A_1O, OA_2 ja nende pikkust a nimetame hüperbooli reaalseks poolteljeks ehk reaalpoolteljeks ning lõike B_1O, OB_2 ja nende pikkust b nimetame hüperbooli imaginaarseks poolteljeks ehk ebapoolteljeks.

Definitsioon 25.7. Kahte tükki, millest hüperbool koosneb, nimetatakse hüperbooli harudeks.

Definitsioon 25.8. Olgu joonel, mis on antud ilmutatud funktsiooni $x_2 = f(x_1)$ abil, lõpmatusse ulatuv haru. Kui selle joone punkti $X(x_1, x_2)$ kaugenemisel lõpmatusse tema kaugus mingist sirgest läheneb nullile, siis seda sirget nimetame joone asümptoodiks. Asümptooti taandatud võrrandiga $x_2 = ax_1 + b$, kus $a \neq 0$, nimetame joone kaldasümptoodiks.

Teoreem 25.2. Sirged

$$l_1 : x_2 = \frac{b}{a}x_1, \quad l_2 : x_2 = -\frac{b}{a}x_1$$

on hüperbooli kaldasümptoodid.

Definitsioon 25.9. Arvu $e = \frac{c}{a}$ nimetame hüperbooli ekstsentrilisuseks.

Definitsioon 25.10. Hüperbooli kõrgust fookuse kohal nimetame tema fokaalparameetriks.

Definitsioon 25.11. Hüperbooli mistahes punkti kaugusi fookusteni nimetame selle punkti fokaalraadiusteks.

$$r_1(M) = |em_1 + a| = em_1 + a, \quad r_2(M) = |em_1 - a| = em_1 - a.$$

Ellipsi ja hüperbooli juhtsirged

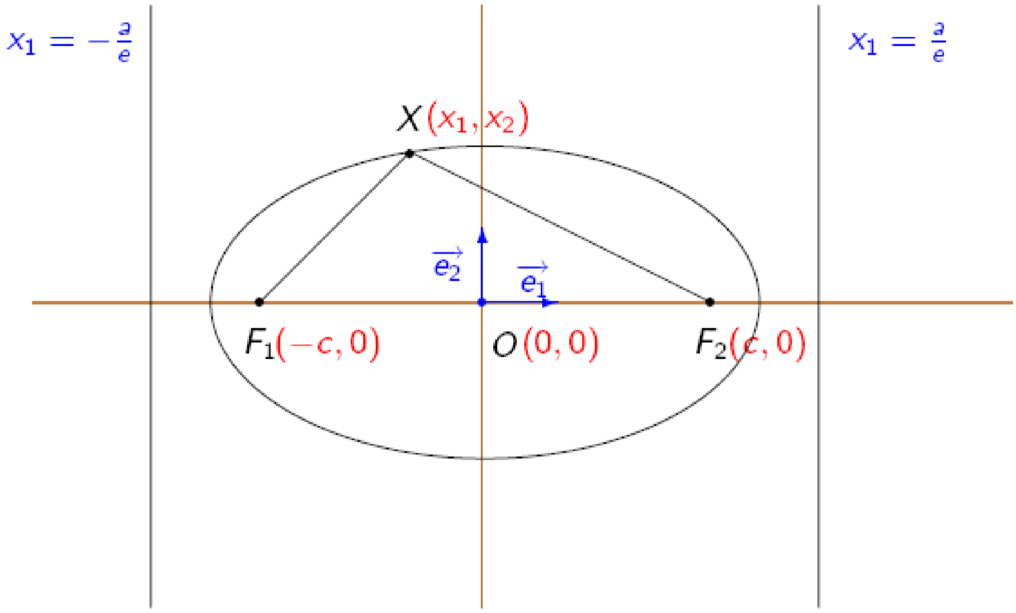
5. detsember 2007. a.
11:51

Definitsioon 26.1. Paralleelseid sirgeid

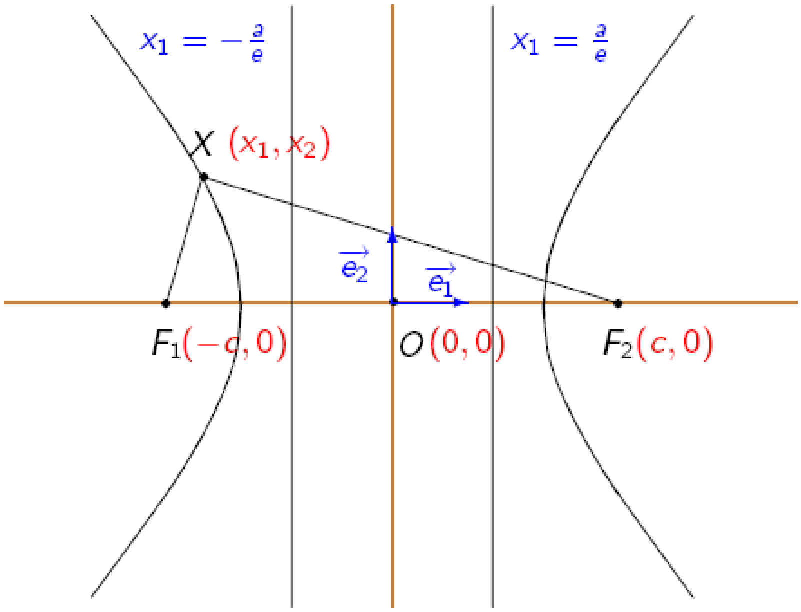
$$l_1 : x_1 = -\frac{a}{e}, \quad l_2 : x_1 = \frac{a}{e}$$

nimetatakse ellipsi (hüperbooli) juhtsirgeteks.

Ellipsi juhtsirged:



Hüperbooli juhtsirged:



Teoreem 26.1. Ellipsi (hüperbooli) iga punkti $M \in \epsilon$ ($M \in h$) korral

$$\frac{r_i(M)}{d(l_i, M)} = e, \quad i = 1, 2,$$

Tõestada!

kus $r_i(M)$ on punkti M fokaalraadius $|F_i M|$ ja $d(l_i, M)$ on punkti M kaugus juhtsirgeni l_i.

Teoreem 26.2. Olgu tasandil fikseeritud sirge l ja temal mitteasuv punkt F. Olgu fikseeritud arv $\bar{e} \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Punktihulk

$$\left\{ X \middle| \quad \frac{r(F, X)}{d(X, l)} = \bar{e} \right\}$$

on $\bar{e} \in (0, 1)$ korral ellips ja $\bar{e} \in (1, \infty)$ korral hüperbool. Saadud ellipsi või hüperbooli ekstsentrilisuseks on $\bar{e}$.

Definitsioon 26.2. Punktihulka

$$\left\{ X \middle| \frac{r(X, F)}{d(X, l)} = e \right\}$$

tasandil nimetame $0 < e < 1$ korral ellipsiks ja $e > 1$ korral hüperbooliks. Sirget l ja punkti F nimetame vastavalt ellipsi (hüperbooli) juhtsirgeks ja fookuseks.

Parabool

5. detsember 2007. a.
12:06

Definitsioon 27.1. Tasandi selliste punktide hulka, mille iga punkt on võrdsel kaugusel sirgest l ja punktist F, nimetatame parabooliks. Punkti F nimetame parabooli fookuseks ja sirget l parabooli juhtsirgeks.

$$P = \left\{ X \middle| \frac{r(X,F)}{d(X,l)} = 1 \right\}.$$

Võrreldes viimast valemit analoogiliste valemitega ellipsi ja hüperbooli jaoks näeme, et parabooli ekstsentrilisus on $e = 1$.

Parabooli kanooniline reeper:

Kõigepealt joonistame fookust F läbiva sirge s, mis on risti sirgega l. Tähistagu K sirgete s ja l lõikepunkti. Olgu p fookuse F kaugus sirgeni l (s.o. $|KF| = p$). Reeperi alguspunkti O paigutame lõigu KF keskpunkti. Ühikvektori $\overrightarrow{e_1}$ valime samasuunaliseks vektoriga $\overrightarrow{KF}$. Ühikvektori $\overrightarrow{e_2}$ valime selliselt, et $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$ ning $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ on parema käe baas.

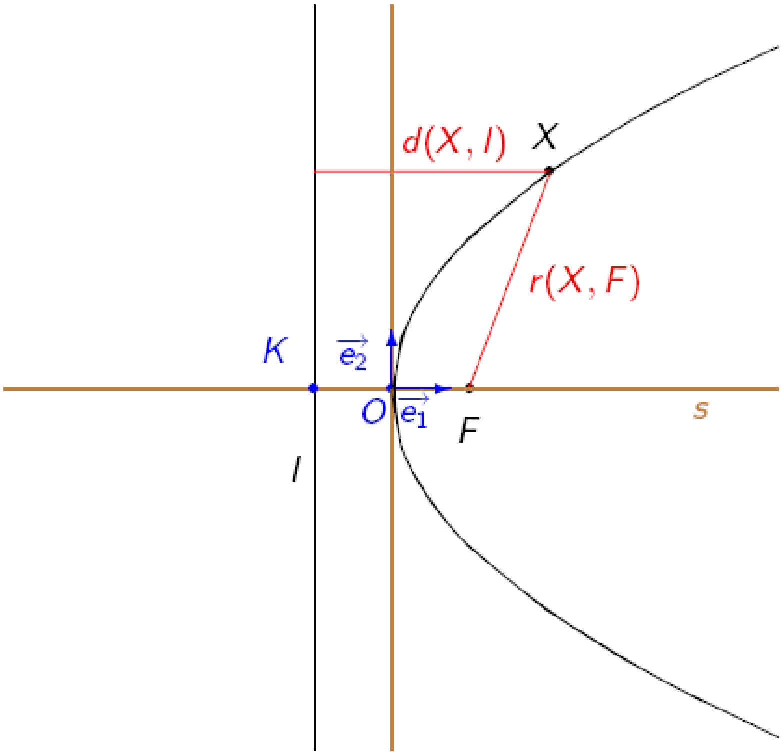
Definitsioon 27.3. Võrrandit

$$P : x_2^2 = 2px_1$$

nimetatakse parabooli kanooniliseks võrrandiks.

Definitsioon 27.4. Parabooli kõrgust fookuse kohal nimetame parabooli fokaalparameetriks.

Uurides parabooli kanoonilist võrrandit näeme, et parabooli $x_2^2 = 2px_1$ fokaalparameetriks on parabooli võrrandis sisalduv konstant p.



Definitsioon 27.5. Teist järku jooneks nimetatakse selliste punktide $X(x_1, x_2)$ hulka tasandil E_2, millede koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_1x_2 + a_4x_1 + a_5x_2 + a_6 = 0,$$

kus $a_1, \dots, a_6 \in \mathbb{R}$ ja vähemalt üks kordajatest a_1, a_2, a_3 on nullist erinev.

Nii ellips, hüperbool kui ka parabool on teist järku jooned. Erinevaid teist järku jooni on kokku 9.

Teist järku pinnad

5. detsember 2007. a.
12:45

Fikseerime ruumis E_3 sirge s ja sellise joone γ, mis asub koos sirgega s mingil tasandil π ruumis E_3.

Fikseerime nüüd meile sobiva ristreeperi ruumis E_3. Tema alguspunktiks O võtame mistahes punkti sirgel s. Olgu s_1 punkti O läbiv ning sirgega s ristuv sirge tasandil π. Baasiühikvektori $\overrightarrow{e_1}$ valime nii, et ta oleks sirge s_1 sihivektoriks. Baasiühikvektori $\overrightarrow{e_2}$ võtame ristiolevaks vektoriga $\overrightarrow{e_1}$ ja sirgega s. Kolmas baasiühikvektor $\overrightarrow{e_3}$ olgu sirge s selline sihivektor, et $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ on parema käe kolmik.

Nüüd, kus reeper on fikseeritud, tekivad ruumi kõigil punktidel koordinaadid. Samuti tekivad joontel võrrandid.

Näiteks sirge s, mis on praegu x_3-telg, määratakse võrranditega $x_1 = 0$ ja $x_2 = 0$.

Joon γ, mis asub x_1x_3-koordinaattasandil, määratakse samuti kahe võrrandiga. Esimeseks nõudeks on asuda nimetatud koordinaattasandil, s.t. $x_2 = 0$. Suvaline joon sellel tasandil on antav mingi ilmutamata kahemuutuja funktsiooni abil võrrandiga $F(x_1, x_3) = 0$.

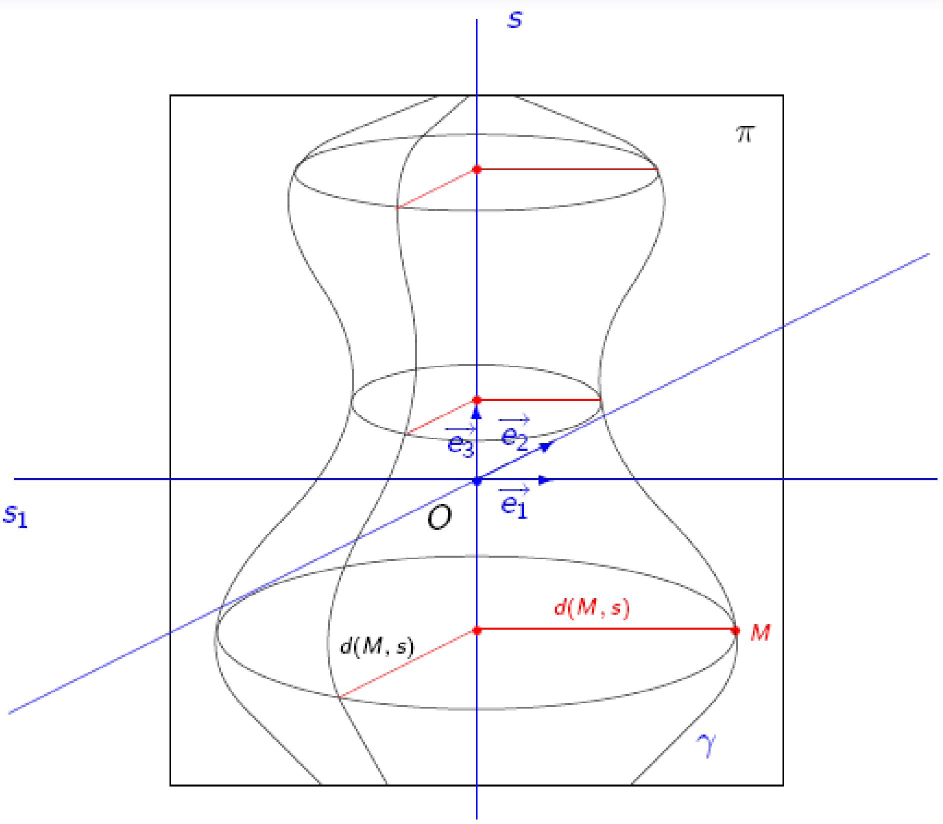
Seega, joon γ on selles reeperis määratud järgmiselt:

$$\gamma : \quad \begin{cases} F(x_1, x_3) & = 0 \\ \qquad x_2 & = 0 \end{cases}.$$

Olgu M joone γ suvaline punkt. Siis punkt M määrab üheselt ära sirgega s ristuva tasandi π_M, millele punkt M kuulub.

Paneme nüüd joone γ pöörlema ümber sirge s, nõudes, et joone γ iga punkt M kirjeldaks pöörlemise käigus ringjoone raadiusega $d(M, s)$ tasandil π_M.

Definitsioon 28.1. Pinda, mis tekib joone γ pöörlemisel ümber sirge s eelpool kirjeldatud viisil, nimetatakse pöördpinnaks teljega s ja juhtjoonega γ.



Reegel. Joone $\gamma : F(x_1, x_3) = 0$ pöörlemisel ümber sirge s (eelpool kirjeldatud viisil) tekkiva pöördpinna võrrandi saamiseks tuleb joone γ ilmutamata võrrandis asendada x_1 avaldisega $\pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Seega, joone γ pöörlemisel tekkinud pöördpinna võrrandiks on

$$F\left(\pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_3\right) = 0.$$

Definitsioon 28.2. Ruumi kokkusurumiseks x_1x_3-tasandi suhtes nimetatakse ruumi punktide asukoha sellist muutmist, kui ruumi mistahes punkt $X(x_1, x_2, x_3)$ viiakse ruumi punktiks $X'(x_1', x_2', x_3')$ valemitega

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = kx_2, \quad x_3' = x_3,$$

kus k on (suvaline fikseeritud) positiivne konstant.

Definitsioon 28.3. Teist järku pinnaks nimetatakse selliste punktide $X(x_1, x_2, x_3)$ hulka ruumis E_3, millede koordinaadid rahuldavat võrrandit

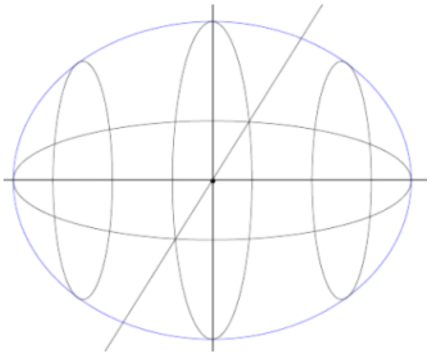
$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_1x_3 + a_6x_2x_3 + a_7x_1 + a_8x_2 + a_9x_3 + a_{10} = 0,$$

kus $a_1, \dots, a_{10} \in \mathbb{R}$ ning vähemalt üks kordajatest $a_1, \dots, a_6$ erineb nullist.

Definitsioon 28.4. Pinda võrrandiga

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

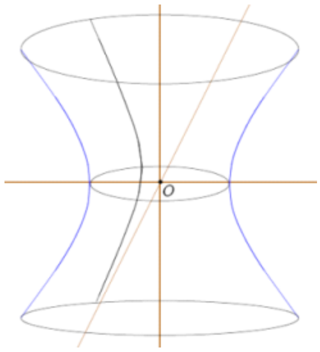
nimetatakse ellipsoidiks pooltelgedega a, b ja c. Ellipsoidi erijuhtu, kus $a = b$, nimetatakse pöördellipsoidiks.



Definitsioon 28.5. Pinda võrrandiga

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

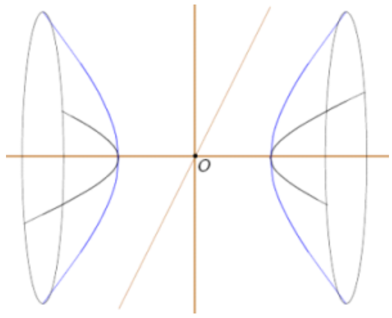
nimetatakse ühekatteliseks hüperboloidiks pooltelgedega a, b ja c. Ühekattelise hüperboloidi erijuhtu, kus $a = b$, nimetatakse ühekatteliseks pöördhüperboloidiks.



Definitsioon 28.6. Pinda võrrandiga

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = -1$$

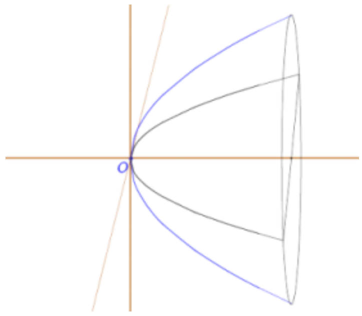
nimetatakse kahekatteliseks hüperboloidiks pooltelgedega a, b ja c. Kahekattelise hüperboloidi erijuhtu, kus $a = b$, nimetatakse kahekatteliseks pöördhüperboloidiks.



Definitsioon 28.7. Pinda võrrandiga

$$\frac{x_1^2}{p_1} + \frac{x_2^2}{p_2} = 2x_3$$

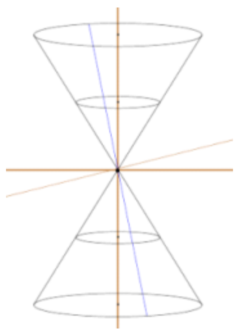
nimetatakse elliptiliseks paraboloidiks. Elliptilise paraboloidi erijuhtu, kus $p_1 = p_2$, nimetatakse elliptiliseks pöördparaboloidiks.



Definitsioon 28.8. Pinda võrrandiga

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0$$

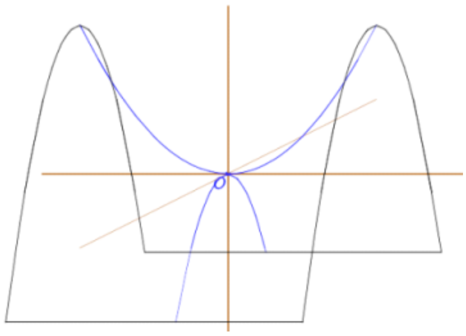
nimetatakse teist järku koonuseks. Teist järku koonuse erijuhtu, kus $a = b$, nimetatakse teist järku pöördkoonuseks.



Definitsioon 28.9. Pinda võrrandiga

$$\frac{x_1^2}{p_1} - \frac{x_2^2}{p_2} = 2x_3, \quad p_1 > 0, \quad p_2 > 0$$

nimetatakse hüperboolseks paraboloidiks.



VII-IX Kolme viimase pinna saamiseks fikseerime ruumis mingi tasandi π ning sellel mingi joone γ. Olgu M joone γ suvaline punkt. Punkt M määrab üheselt ära tasandiga π ristuva ning punkti M läbiva sirge s. Paneme nüüd sirge s liikuma mööda joont γ selliselt, et sirge s oleks kogu liikumise vältel risti tasandiga π. Selle tulemusena määravad sirge s punktid teatava pinna ruumis E_3.

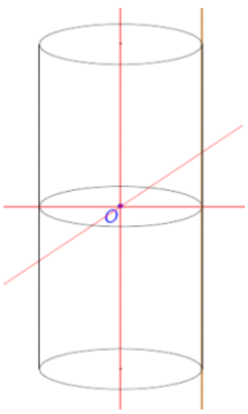
Definitsioon 28.10. Eelpool kirjeldatud liikumisel joone s punktide poolt tekitatud pinda nimetatakse püstsilindriks juhtjoonega γ ja moodustajaga s.

Definitsioon 28.11. Püstsilindrit, mille juhtjooneks on ellips, hüperbool või parabool, nimetatakse vastavalt elliptiliseks, hüperboolseks või paraboolseks silindriks.

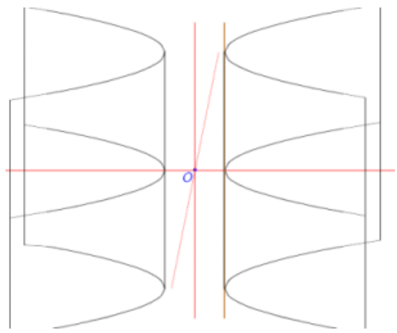
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad x_2^2 = 2px_1.$$

Saadud võrrandid ongi vastavalt elliptilise, hüperboolse ja paraboolse silindri võrrandid.

Elliptiline silinder:



Hüperboolne silinder:



Paraboolne silinder: